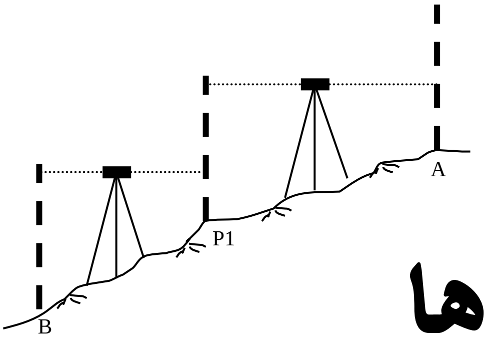
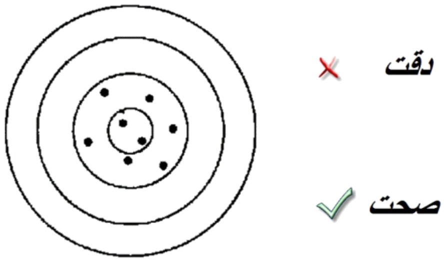
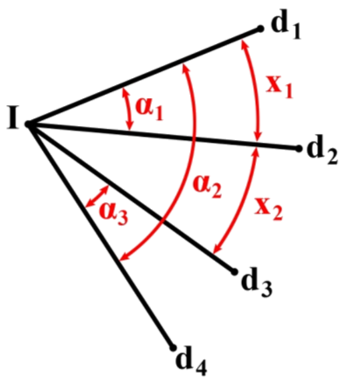
مجتمع فنی مهندسی نقشه برداری



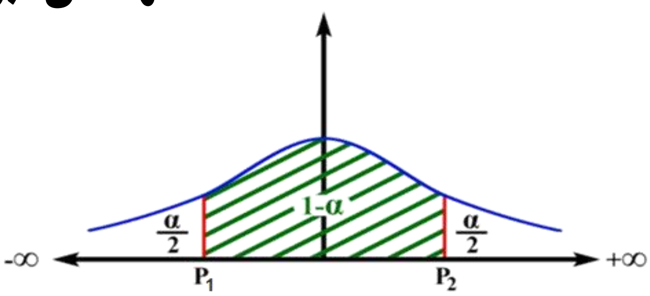
تئوری خطاها

Theory of errors

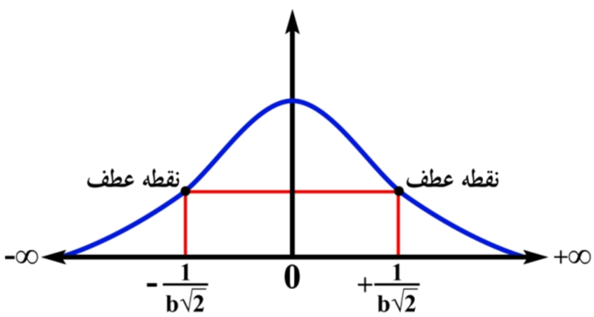




مهندس ابراهیم راستگو



بهار ۹۱



بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به بهترینهای زندگانی ام

پدر

و

مادر

مهربانم

فهرست

منابع:

جزوه تئوری خطاهای دکتر نجفی دانشگاه تهران

جزوه تئوری خطاهای دکتر محمد سحابی دانشگاه تهران

جزوه تئوری خطاهای فروتن

کتاب تئوری خطاها: تألیف ابوالفضل رنجبر، عبدالحسین حاجی زاده

برای درک بهتر این درس توصیه می‌شود دانشجو دروس ذیل را مطالعه فرماید.

۱) ریاضی یک (مشتق و ضد مشتق)

۲) مبانی آمار و احتمالات

۳) نقشه برداری عمومی

آوردن ماشین حساب سر کلاس الزامی است

حضور سر کلاس و فعالیت کلاسی	۲ نمره (ارفاق)
تمرین‌های کلاسی	۳ نمره
میان‌ترم	۷ نمره
پایان ترم	۱۰ نمره

مقدمه

ارزیابی و تعیین یک سری پارامترها (مجهولات) که نشانگر خواص، شکل، روابط یا رفتار اشیاء مختلف پیرامون ما مسئله‌ای است که در تمام علوم به آن پرداخته می‌شود.

در علم نقشه برداری نیز هدف ما تعیین پارامترهای، وضعیت و موقعیت اشیاء می‌باشد. که در راستای این هدف ما به جمع آوری یک سری کمیت‌های فیزیکی یا همان اندازه‌گیری‌ها (مشاهدات) می‌پردازیم.

به عنوان مثال جهت بدست آوردن طول یک ضلع از یک قطعه زمین ممکن است اقدام به اندازه‌گیری آن به صورت مستقیم با نوار اندازه‌گیری کنیم.

کمیت‌های فیزیکی که ما در نقشه برداری با آن سروکار داریم:

۱) طول:

الف): طول افقی   ب): طول قائم (اختلاف ارتفاع)

۲) زوایا :

الف): امتدادهای افقی   ب): امتدادهای قائم

به عنوان مثال اگر پارامتر مجهول ما محیط یک قطعه زمین باشد (A,B,C,D) ممکن است کمیت‌های فیزیکی ما طول‌های اندازه‌گیری شده به روش مستقیم، (طول اضلاع) باشد. حال برای بدست آوردن پارامتر مجهول، بین مشاهدات روابط ریاضی برقرار می‌کنیم تا به مجهول برسیم که به این روابط ریاضی، مدل ریاضی گفته می‌شود.

$\underline{P = A+B+C+D}$ مدل ریاضی

پس یکسری مجهولات داریم که می‌خواهیم مقادیر آن‌ها را بدست آوریم که مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیستند. پس برای بدست آوردن مقدار این مجهولات یکسری مشاهدات طولی یا زاویه‌ای در روش نقشه برداری کلاسیک انجام می‌دهیم. سپس با برقراری یک رابطه ریاضی بین مشاهدات و مجهولات (مدل ریاضی) به محاسبه مجهولات می‌پردازیم.

تعاریف اساسی

۱) مشاهدات (معلومات)[1]: (L)

مشاهدات به کلیه کمیت‌های فیزیکی که قابل اندازه‌گیری باشد و آن را به صورت مستقیم بدست آورده باشیم گفته می‌شود. (پارامترهای مشخص)

۲) مجهولات[2]: (x)

[1] Known Or Observation
[2] Unknown

مجهول به پارامترهایی گفته می‌شود که امکان اندازه‌گیری مستقیم آن‌ها وجود نداشته و برای بدست آوردن آن‌ها، نیاز است در قالب یک روش هندسی خاص و با اندازه‌گیری پارامترهای مشخص، اقدام به محاسبه‌ی این المان‌ها نمود که در واقع هدف اصلی نقشه برداری دست یابی به مقادیر مجهولات می‌باشد.

پارامترهای مجهول با بردار x و تعداد مجهولات با u نشان داده می‌شوند (x_u).

از جمله مقادیر مجهول در نقشه برداری می‌توان به مواردی از این قبیل اشاره کرد:

مساحت، محیط یک منطقه محصور، حجم عملیات خاکی، ژیزمان یک امتداد خاص، تعیین مختصات z,y,x یک نقطه در سیستم مختصات معلوم محلی، منطقه‌ای و یا جهانی، یا پارامترهای جزر و مد و یا مقدار ثابت جاذبه (g).

از طرف دیگر در نقشه برداری علاوه بر پارامتر مجهول، دقت مجهول بدست آمده نیز مهم می‌باشد. مثلاً اگر لازم است نقطه A با دقت 5^{mm} مختصات دهی شود، بنابراین در نقشه برداری علاوه بر شناخت مجهول و محاسبه‌ی آن، مطلب مهم دیگر این است که پارامترهای مجهول، به چه نحوی تعیین شوند که دقت برآورد آن‌ها مطلوب باشد؟ این مطلب را می‌توان به این صورت عنوان کرد که یک منطقه‌ی اطمینان تعریف شود که نقطه محاسبه شده با درصد احتمال مورد نظر در داخل آن منطقه باشد.

۳) مدل ریاضی[1]:

در علم نقشه برداری، مدل ریاضی به این صورت تعریف می‌شود. که یک شکل هندسی که برای محاسبه و برای ارتباط مشاهدات و مجهولات با هم به کار رفته و به صورت تابعی ارائه می‌گردد.

مثلاً فاصله افقی AB به علت وجود مانع مجهول می‌باشد و به صورت مستقیم نمی‌توان آن را اندازه‌گیری کرد. برای حل این مشکل از یک نقطه کمکی مانند C استفاده می‌کنیم حال می‌توان مشاهده کرد که به علت وجود مشکل ما از نقطه کمکی استفاده کردیم و شکل هندسی که تشکیل شد یک مثلث (ABC) است. و روابط ریاضی موجود در مثلث می‌تواند مدل‌های ریاضی ما را تشکیل دهد. با فرض اینکه بتوانیم سه زاویه و دو طول از این مثلث را قرائت کنیم، روابط ریاضی که می‌توانیم داشته باشیم به شرح زیر خواهد بود.

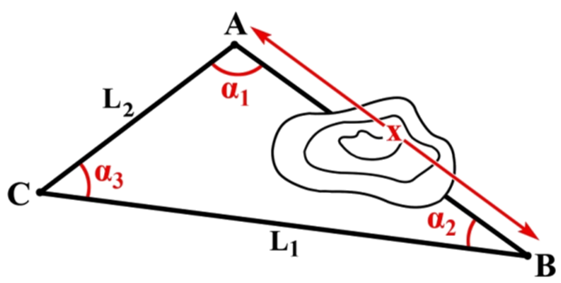
$$1)\ \frac{L_1}{Sin\alpha_1} = \frac{x}{\sin\alpha_3}$$

$$2)\ \frac{L_2}{Sin\alpha_2} = \frac{x}{\sin\alpha_3}$$

$$4)\ L_1^2 = L_2^2 + x^2 - 2\times l_2 \times x \times \cos\alpha_1$$

$$5)\ L_2^2 = L_1^2 + x^2 - 2\times l_1 \times x \times \cos\alpha_2$$

$$6)\ x^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2\times L_1 \times L_2 \times \cos\alpha_3$$



هر یک از این روابط می‌تواند مدل مورد نظر ما را برای دسترسی به مقدار مجهول x میسر سازد.

---
[1] Model Mathematical

المان‌های مدل ریاضی

۱) ثوابت (C): این المان ممکن است در مدل وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد. مقدار ثابت را با C نشان می‌دهیم. به عنوان مثال در مدل ریاضی $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ = ۱۸۰$ مقدار عددی ۱۸۰ المان ثابت مدل می‌باشد.

۲) مشاهدات (L): این المان باید مورد اندازه‌گیری قرار گیرد.

۳) مجهولات (X) : این المان که مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیست را مجهول گویند و آن را با x نشان می‌دهیم.

تقسیم بندی مدل‌های ریاضی از نظر فرم و شکل

از نظر فرم و شکل مدل‌های ریاضی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱) مدل مستقیم[۱]:

مدل‌هایی هستند که در آن‌ها ارتباط بین مشاهدات و مجهولات به طور مستقیم برقرار می‌گردد. در واقع این مدل مستقیماً بیان می‌کنند که مجهولات تابعی از مشاهدات می‌باشند. مثلاً مساحت یک زمین مستطیل شکل به ابعاد b,a یعنی x=a*b (در این مدل ریاضی با مشاهده‌ی b,a، مستقیماً مساحت (مجهول x) محاسبه می‌شود).

۲) مدل غیر مستقیم[۲]:

مدل‌هایی هستند که در آن‌ها مشاهدات به طور صریح تابعی از مجهولات نیستند. یعنی با اندازه‌گیری مستقیم مشاهدات نمی‌توان به مجهولات رسید به عنوان مثال اگر طول مابین دو نقطه با مختصات مجهول $(B(x,y),A(x,y))$ مشاهده شود نمی‌توان مجهولات (x,y دو نقطه) را با استفاده از این مشاهدات (طول) برآورد نمود. بنابراین مجبوریم یک دستگاه از معادلات را تشکیل دهیم.

$$L_{AB} = ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)^{0.5}$$

۳) مدل ضمنی[۳]:

در این قبیل مدل‌ها مشاهدات به صورت مستقیم و صریح تابعی از مجهولات نبوده، بلکه رابطه بین مشاهدات و مجهولات به شکل یک تابع است که به صورت $f(X,L)=0$ بیان می‌شود. و این مدل اکثراً غیر خطی می‌باشد. برای مثال می‌توان مدل تعیین موقعیت یک قایق در حال حرکت را که موقعیت آن تابعی از زمان است را نام برد.

خطا[۴]

---
[1] Directed Model
[2] Undirected Model
[3] Incident Model
[4] Error

خطا عبارتست از میزان انحراف قابل قبول یک پدیده متناسب با نیاز از مقدار واقعی آن کمیت.

منابع خطا در مشاهدات[1]:

۱) منابع دستگاهی: مانند نقص در دستگاه، کالیبره نمودن دستگاه، دقت کم دستگاه و …
۲) منابع محیطی: مانند اثرات بار، تشعشعات نور خورشید و دما و فشار از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر یا در یک نقطه از زمانی به زمانی دیگر.
۳) منابع انسانی: مانند محدودیت ذهن انسان، ضعف در بینایی، عدم تجربه و تسلط به کار، حواس پرتی، خستگی و …

تقسیم بندی خطاها از نظر ماهیت آن‌ها:

به علت یکی از منابع فوق ممکن است در مشاهدات (اندازه‌گیری‌ها) یکی از سه حالت خطا رخ دهد:
۱) خطای فاحش (اشتباه) ۲) خطای تدریجی (سیستماتیک) ۳) خطای تصادفی

خطای فاحش (اشتباه)[2]:

اگر مقدار اختلاف یک کمیت با مقدار واقعی آن از حداکثر خطای مجاز بیشتر باشد به این کمیت اندازه‌گیری شده خطای فاحش یا اشتباه گفته می‌شود این نوع خطا معمولاً منبع انسانی دارند. مثلاً در هنگام نوشتن به جای عدد 6 عدد 9 را بنویسیم و یا در هنگام گوش کردن، عدد 2 را با عدد 9 اشتباه درک کنیم.
مشخصه خطای فاحش:
۱) اندازه این خطا بزرگ است ۲) منابع انسانی دارد (معمولاً) ۳) با تکرار اندازه‌گیری‌ها به راحتی قابل شناسایی می‌باشد.
این نوع خطا به علت بزرگی مقدار خطای آن باید از بین مشاهدات حذف نمود.
مثال: در بین مشاهدات طول و زاویه زیر دور مقدار اشتباه خط بکشید.

ID	DD	MM	SS
1	61	38	36.32
2	61	38	35.36
3	61	38	53.35
4	61	38	35.53
5	61	38	36.25
6	61	38	36.00

ID	Distance
1	50.010
2	49.99
3	49.989
4	50.020
5	50.005
6	49.899
7	49.980

البته تشخیص مقادیر اشتباه در بین مشاهدات به این سادگی نبوده و باید آن‌ها را مورد بررسی قرار داد و ابتدا

[1] Sources Of Errors
[2] Blunder

مقدار انحراف استاندارد را حساب کرده و بعد مشاهداتی از چندین برابر این انحراف استاندارد بیشتر باشد را به عنوان اشتباه در نظر می‌گیریم.

خطای تدریجی (سیستماتیک)[1]:

به مجموعه خطاهایی گفته می‌شود که همگی در یک جهت هستند و به تدریج با هم جمع می‌شوند (تجمعی) و علت بسیاری از آن‌ها دستگاهی است که با آن اندازه‌گیری می‌کنیم. این نوع خطا را با تکرار مشاهدات نمی‌توان حذف نمود.

مشخصه خطای سیستماتیک:

۱) از یک رابطه مشخص پیروی می‌کند یعنی می‌توان با استفاده از یک رابطه ریاضی مقدار آن را بدست آورد. یا به عبارتی این نوع خطا قابل فرموله کردن می‌باشد.

۲) بر روی تمام اندازه‌گیری‌ها تأثیر خواهد گذاشت.

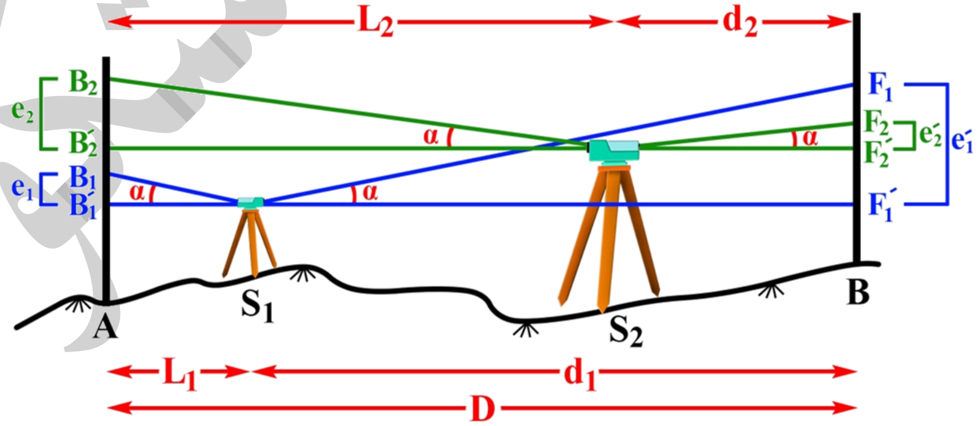
۳) همیشه در یک جهت می‌باشد (به مشاهدات اضافه یا از مشاهدات کم می‌شود).

روش‌های حذف خطای سیستماتیک:

۱) با معلوم بودن خطا دستگاه را کالیبره می‌کنیم: مانند بدست آوردن خطای کلیماسیون و اعمال آن بر روی تارهای نشانه روی دستگاه.

۲) استفاده از روش‌های مشاهداتی خاص: مانند گذاشتن دوربین ترازیاب در وسط دو شاخص هنگام مشاهدات ترازیابی.

۳) استفاده از یک مدل ریاضی: مانند فرمول بدست آوردن میزان خطای کلیماسیون و اعمال مقدار آن بر روی مشاهدات.



$$e = \frac{(B_2 + F_1) - (B_1 + F_2)}{(L_2 + d_1) - (L_1 + d_2)}$$ مقدار خطا برای هر متر فاصله از دستگاه

---
[1] Systematic Error

$$e=\frac{\text{مجموع قرائت هاي نزديک} - \text{مجموع قرائت هاي دور}}{\text{مجموع فواصل نزديک} - \text{مجموع فواصل دور}}$$

⇐ قرائت تصحیح شده = e × فاصله شاخص تا دوربین + قرائت

تمرین: چند نوع خطای سیستماتیک را بیابید و روش‌های حذف آن‌ها را بیان کنید.

خطای اتفاقی [۱]

زمانی که ما کلیه اثرات خطاهای فاحش و خطاهای سیستماتیک را از روی مشاهدات بر داریم یک نوع دیگر از خطاها در مشاهدات وجود دارد که منبع اصلی آن و جهت آن مشخص نبوده و هم به صورت مثبت و هم به صورت منفی ظاهر می‌شود. و به دلیل اینکه جهت و میزان و منبع این خطا مشخص نبوده به آن خطای تصادفی یا اتفاقی گفته می‌شود. و به خاطر ماهیت اتفاقی بودن این نوع خطاها، برای بررسی اثرات آن‌ها بر روی نتایج اندازه‌گیری‌ها از قواعد آمار و احتمالات و به خصوص از قانون توزیع نرمال استفاده خواهیم کرد.

مشخصه خطاهای تصادفی:

۱) قابل پیش بینی نبوده ۲) اندازه این خطا کوچک است ۳) از یک رابطه ریاضی مشخص پیروی نمی‌کند ۴) می‌توان آن را تخمین زد

در این درس بحث اصلی در مورد خطاهای اتفاقی می‌باشد و به منظور درک بهتر باید با اصول و مفاهیم آمار و احتمالات آشنایی کافی داشته باشیم.

بررسی اصول و مفاهیم پایه‌ای آمار و احتمالات

جامعه یا فضای نمونه:

مجموعه تمام حالات یا نتایج ممکن برای یک پدیده فیزیکی یا آزمایش تجربی را جامعه یا فضای نمونه آن پدیده فیزیکی یا آزمایش تجربی گویند.

مثال: در پرتاب سکه فضای نمونه ما شامل دو نمونه خواهد بود.

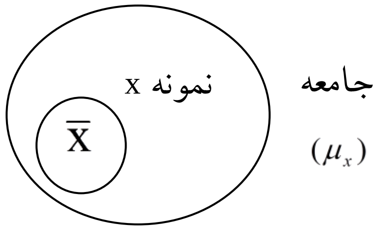
فضای نمونه = S = { شیر ،خط}

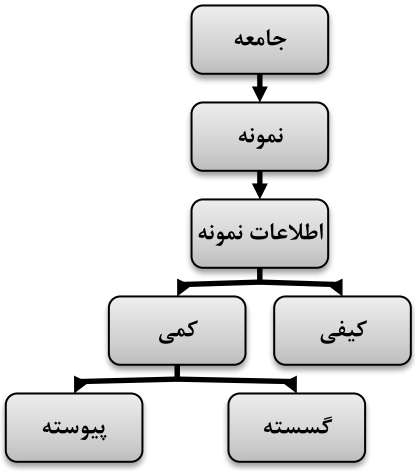
مثال: در پرتاب تاس فضای نمونه ما شامل ۶ نمونه خواهد بود.

فضای نمونه =S ={1,2, 3, 4, 5,6}

[1] Random Error

نمودار جامعه یا همان فضای نمونه



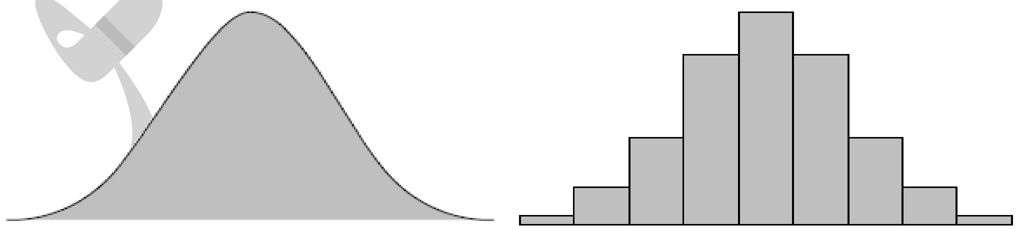


پس با توجه به نمودار جامعه در می‌یابیم که هر جامعه از نمونه‌هایی تشکیل شده که این نمونه‌ها خود شامل اطلاعاتی هستند این اطلاعات می‌تواند از نوع کمی یا کیفی باشد. حال باید با یک سری مقیاس‌ها این اطلاعات کیفی را به اطلاعات کمی تبدیل کنیم.

مقیاس‌ها: ۱- اسمی: کلمات و اسامی را به عدد تبدیل می‌کنیم.
۲- ترتیبی: شدت یا ضعف یک خصوصیت را به عدد تبدیل می‌کنیم
داده‌های کمی یا گسسته هستند و یا پیوسته:
۱) پیوسته[1]: اگر تعداد اعضای مجموعه غیرقابل شمارش باشد (نامتناهی)
۲) گسسته[2]: اگر تعداد اعضای مجموعه قابل شمارش باشد (متناهی)
گسسته = $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ پیوسته = $[2,3)$ یا $(2, 4]$

روش تشخیص گسستگی یا پیوستگی یک مجموعه: کافی است به یکی از اعضای مجموعه نگاه کرد اگر بتوان آن را با گرد کردن یا رند کردن بیان نمود آن مجموعه گسسته است در غیر این صورت آن مجموعه پیوسته است.

تعداد فرزندان ⇐ گسسته   طول یک ضلع از یک زمین ⇐ پیوسته

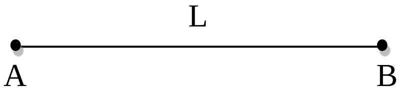

Continuous   Discrete

نکته: پس مشاهدات نقشه برداری از نوع پیوسته (بی نهایت عضو) می‌باشند اما در عمل این‌گونه نیست و ما

---
[1] Continual
[2] Discrete

تعداد محدودی اندازه‌گیری می‌کنیم.

مثال: یک طول را اندازه‌گیری کردیم. اعضای جامعه نمونه را بیان کنید.



$\Rightarrow S=\{L_1, L_2, L_3, \ldots L_n\}$

پس به این دلیل که فضای مشاهدات در نقشه برداری بی نهایت عضو دارد. یا به عبارتی بی نهایت جواب ممکن است برای اندازه‌گیری ما حاصل شود. در نتیجه تعداد محدودی از اعضای جامعه را انتخاب کرده و با استفاده از نتایجی که از مطالعه نمونه بدست می‌آوریم در مورد جامعه تصمیم گیری می‌کنیم.

متغیر تصادفی

تابعی که به هر یک از عضوهای فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$X: S \rightarrow IR$ متغیر تصادفی   IR= اعداد حقیقی

متغیر تصادفی می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد.

$-\infty$ IR $+\infty$ $\longleftrightarrow$: پیوسته   N={1,2,3, …} گسسته

اندازه‌گیری‌ها در نقشه برداری نمونه‌های تصادفی هستند. اگر بخواهیم یک اندازه‌گیری را به صورت پیوسته انجام دهیم باید آن را بی نهایت بار تکرار کنیم. اما در عمل مشاهدات را n بار انجام می‌دهیم (حالت گسسته) و با توجه به این کمیت گسسته مقدار واقعی مشاهده را برآورد می‌کنیم. این عمل را نمونه برداری[1] گویند.

مثال: اگر X برابر با مجموع دو تاس باشد.

X={2,3,4,…,12}   گسسته

مثال: اگر X برابر با تفاضل دو تاس باشد.

X={0,1,2,3,4,5}   گسسته

مثال: اگر X برابر با تعداد پرتاب یک تاس باشد تا عدد ۶ بیاید.

X={1,2,3,…}   پیوسته

مثال: اگر X برابر با طول عمر یک دوربین نقشه برداری باشد.

X={0, … $+\infty$}   پیوسته

نکته: متغیر تصادفی را با حروف بزرگ (X) و مقادیر تصادفی را با حروف کوچک (x) نشان خواهیم داد.

تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته:

تابع $p(X=x)$ (احتمال اینکه متغیر (X) برابر با یک مقدار (x) باشد) به تابع احتمال معروف است. و این تابع دارای خواص زیر می‌باشد.

[1] Sampling

$$1)\ p(X=x)\geq 0$$
$$2)\sum p(X=x)=1$$

این دو خاصیت تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته بیان می‌کند که هیچ گاه احتمال یک متغیر تصادفی منفی نخواهد بود. و همچنین مجموع تمامی احتمال‌ها برای تمامی اعضای مجموعه برابر یک خواهد شد.

مثال: احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد 3 بیاید.

$$p(X=3)=\frac{1}{6}$$

مثال: مطلوب است مقادیر و احتمال آن‌ها و تابع احتمال برای مجموع دو تاس

x	$p(X=x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
	1

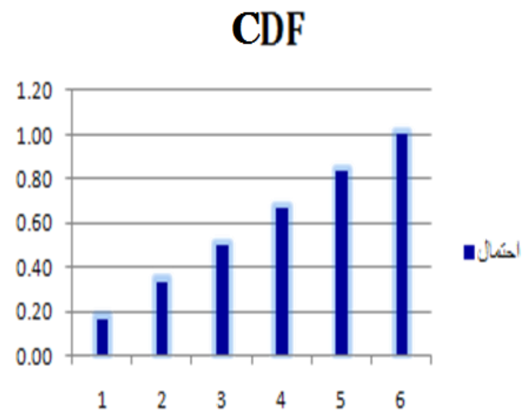
$$X=\{2,3,4,\ldots,12\}$$
$$p(X=2)=p(1,1)=\frac{1}{36}$$
$$p(X=3)=p(1,2)+p(2,1)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$$
$$p(X=4)=p(1,3)+p(3,1)+p(2,2)=\frac{3}{36}$$
$$\Rightarrow p(X=x)=\frac{6-|7-x|}{36}$$

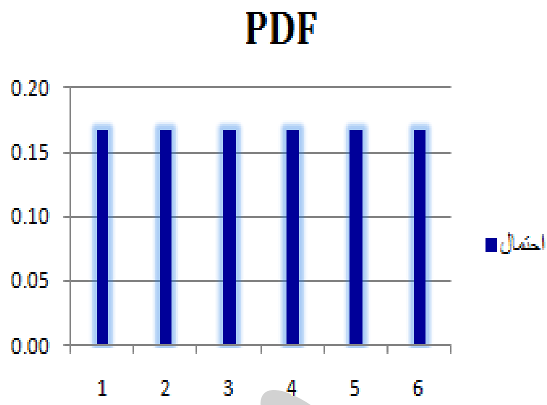
تابع توزیع تجمعی (C.D.F[1])

در حقیقت این تابع، نمودار انباشته شده احتمالات تمامی متغیرها را نشان می‌دهد.

مثال: برای پرتاب تاس نمودار C.D.F و P.D.F آن را ترسیم کنید.

[1] Cumulative Distribution Function

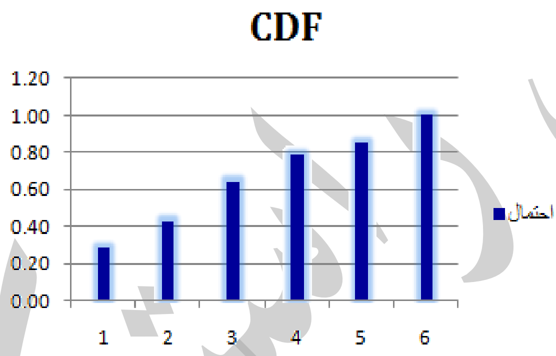


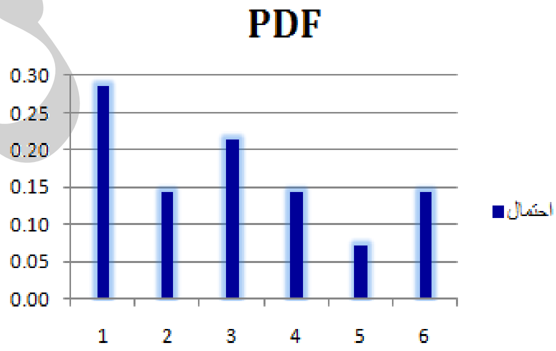


مثال: اگر نمونه‌های تصادفی X را داشته باشیم تابع توزیع تجمعی و تابع توزیع احتمالی این مجموعه را رسم کنید.

X= {3,2,4,1,6,1,3,6,1,2,4,3,1,5}   n=14

$P(1)=\frac{4}{14}$, $P(2)=\frac{2}{14}$, $P(3)=\frac{3}{14}$, $P(4)=\frac{2}{14}$, $P(5)=\frac{1}{14}$, $P(6)=\frac{2}{14}$





مشاهده می‌شود که تابع C.D.F دارای خواص زیر می‌باشد.

۱) مقدار تابع C.D.F همواره مثبت است.

۲) تابع C.D.F یک تابع صعودی است.

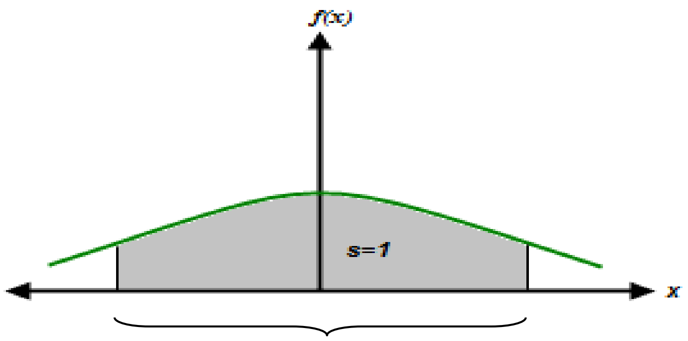
۳) مقدار تابع C.D.F به ازاء بزرگترین x یعنی x_n برابر یک می‌باشد.

تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته (P.D.F[1])

تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته (P.D.F) تابع f(x) به تابع چگالی احتمال معروف است. و این تابع دارای شکل و خواص زیر می‌باشد.

[1] Probability Density Function

$$1)\ f(x) \ge 0$$
$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



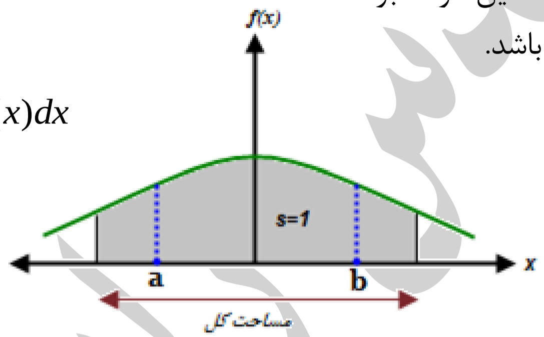
مقادیر x (مقادیر متغیرهای تصادفی پیوسته)

مجموع احتمال‌ها برای تمامی متغیرهای تصادفی پیوسته همواره برابر با مساحت سطح زیر منحنی تابع با محور xها می‌باشد که برابر یک است.

نکته: در متغیرهای پیوسته اگر بخواهیم احتمال را حساب کنیم تنها برای یک نقطه (یک متغیر تصادفی) برابر صفر خواهد بود و به همین دلیل به آن تابع چگالی احتمال گفته می‌شود چون احتمال را برای یک بازه (سطح) مشخص می‌کند. ولی در حالت گسسته این گونه نبود.

مثال: احتمال اینکه متغیر مابین b,a باشد.

$$p(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



مثال: احتمال اینکه متغیر ما بین b,a نباشد.

$$p(x<a), p(x>b) = 1 - \int_a^b f(x)dx$$

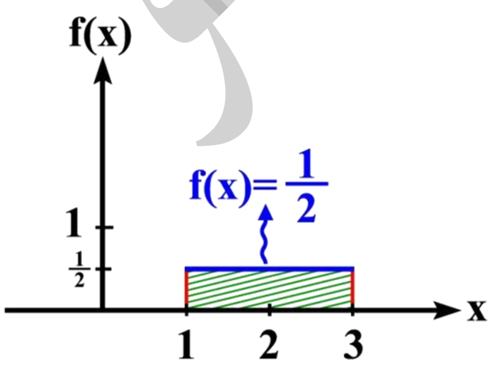
مثال: احتمال اینکه متغیر ما a باشد.

$$p(x=a) = p(a \le x \le a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

مسئله: یک متغیر تصادفی پیوسته که مقادیرش بین $x_1 = 1$ $x_2 = 3$، فرض شده دارای یک تابع چگالی به صورت $f(x) = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

الف) نشان دهید که سطح زیر منحنی برابر یک می‌باشد.

ب) $P(2 < x < 2.5)$ و $p(x < 1.6)$ را بدست آورید.



$$\int_1^3 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\int_2^{2.5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_2^{2.5} = \frac{2.5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

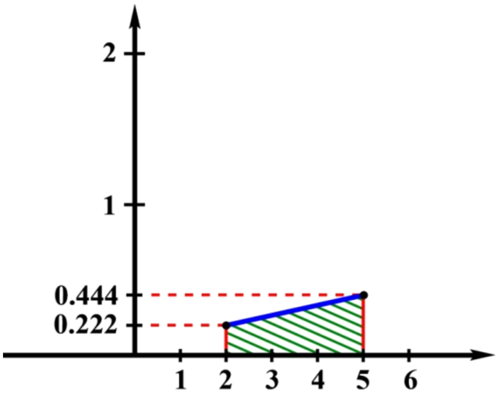
$$\int_{-\infty}^{1.6} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_1^{1.6} = \frac{1.6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

مثال: یک متغیر تصادفی پیوسته که مقادیرش بین $x_2 = 5 , x_1 = 2$ فرض شده دارای تابع چگالی $f(x) = \dfrac{2(1+x)}{27}$ است.

الف) $p(x<4)$ را معین کنید.

ب) $p(3<x<4)$ را معین کنید.

ج) $p(x>3)$ را معین کنید.



$$y = \frac{2(1+x)}{27} \Rightarrow y = \frac{2(1+2)}{27} = \frac{6}{27} = 0.222 \Rightarrow y = \frac{2(1+5)}{27} = \frac{12}{27} = 0.444$$

$$p(x<4) = \int_{-\infty}^{4} \frac{2(1+x)}{27} dx = \frac{2}{27}\int_{2}^{4} 1+x dx = \frac{2}{27}\left(\int_{2}^{4} dx + \int_{2}^{4} x dx\right)$$

$$= \frac{2}{27}\left(x\Big|_2^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 \right) = \frac{2}{27}(2+(8-2)) = \frac{2}{27}(8) = \frac{16}{27} = 0.592$$

$$p(3<x<4) = \int_3^4 \frac{2}{27}(1+x)dx = \frac{2}{27}\left(x\Big|_3^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_3^4 \right) = \frac{2}{27}\left(1+\frac{16-9}{2}\right) = \frac{2}{27}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$p(x>3) = \int_3^{+\infty} \frac{2}{27}(1+x)dx = \frac{2}{27}\int_3^5 (1+x)dx = \frac{2}{27}\left(x\Big|_3^5 + \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 \right) = \frac{2}{27}\left(2+\frac{25-9}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{27}(2+8) = \frac{20}{27} = 0.740$$

مقدار واقعی یک کمیت (μ_x)

مقدار واقعی یک کمیت را با μ_x نشان می‌دهند که این مقدار غیر قابل دسترس است.

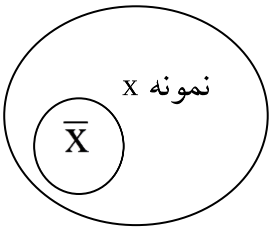
میانگین یک نمونه[1]

میانگین یک جامعه را با μ_x و میانگین یک نمونه را $\bar{x}$ نشان می‌دهیم.

$x \rightarrow$ متغیر تصادفی

$\bar{x} \rightarrow$ میانگین نمونه

$\mu_x \rightarrow$ میانگین جامعه



جامعه

(μ_x)

[1] Mean Of A Sample

در حالت گسسته مقدار میانگین برابر است با:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

اگر داده‌ها دارای فراوانی[1] باشند (بیش از یک بار تکرار شده باشند) داریم:

x	فراوانی
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + \dots x_n \times f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \times f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

* میانگین یک کمیت محتمل‌ترین مقدار برای آن کمیت یا به عبارتی مقداری است که بیشترین احتمال وقوع را دارد.

مثال: اگر نمونه‌های زیر را با فراوانی داشته باشیم محتمل‌ترین مقدار آن را بیابید.

x	فراوانی(f_i)
x_1	1
x_2	5
x_3	6
x_4	3
x_5	4
x_6	2

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 \times 1 + x_2 \times 5 + x_3 \times 6 + x_4 \times 3 + x_5 \times 4 + x_6 \times 2}{1+5+6+3+4+2}$$

روش‌های محاسبه میانگین

۱) تغییر مبدأ:

از این روش زمانی استفاده می‌شود که اعضای نمونه اعداد بزرگی باشند. در این روش از تمام اعضای نمونه یک مقدار ثابت مانند A را کم می‌کنیم و سپس میانگین باقیمانده‌ها را محاسبه می‌کنیم و در آخر به میانگین باقیمانده‌ها مقدار A را اضافه می‌کنیم.

[1] Frequency

$$X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$$

$$d_i = x_i - A \Rightarrow \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \Rightarrow \bar{x} = \bar{d} + A$$

مثال: اعداد زیر مربوط به اندازه‌گیری یک طول است میانگین آن را حساب کنید.

x_i	d_i
100.010	0.010
100.015	0.015
100.017	0.017
100.020	0.02
100.011	0.011
100.008	0.008
100.009	0.009
100.007	0.007
100.014	0.014

$$A = 100$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9} di = \frac{1}{9} \times 0.111 = 0.0123$$

$$\bar{x} = \bar{d} + A = 0.0123 + 100 = 100.0123$$

۲) تغییر واحد:

از این روش در حالتی استفاده می‌شود که تمامی اعضای نمونه، مضرب صحیحی از یک عدد باشند. در این حالت تمام اعضاء را بر آن عدد مورد نظر تقسیم کرده و میانگین داده‌های جدید را بدست می‌آوریم.

و در آخر عدد مضرب را در میانگین بدست آمده ($\bar{d}$) ضرب می‌کنیم.

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad d_i = \frac{x_i}{c} \qquad \Rightarrow \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \Rightarrow \bar{x} = c \times \bar{d}$$

c : یک مقدار ثابت

مثال: میانگین اعداد زیر را بدست آورید.

x_i	d_i	u_i
125	25	5
120	24	4
130	26	6
100	20	0
90	18	-2

$$c = 5 \qquad A = 20$$

$$\bar{u} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{13}{5} = 2.6$$

$$\bar{d} = \bar{u} + 20 = 22.6 \qquad \bar{x} = 5 \times \bar{d} = 113$$

باقیمانده‌ها[1]

عبارتست از تفاوت هر عضو نمونه (x_i) با میانگین نمونه ($\bar{x}$) به این مقدار خطای ظاهری نیز گفته می‌شود.

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

اختلاف[2]

چنانچه عضوی را به دلخواه از بین نمونه‌ها انتخاب کنیم و آن را x' بنامیم به تفاوت هر یک از اعضاء نمونه با عضو انتخاب شده، اختلاف آن نمونه می‌گویند.

---
[1] Residual
[2] Difference

$$d_i = x_i - x' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - nx'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x')$$

مثال: محتمل‌ترین مقدار را برای مشاهدات زاویه‌ای زیر بدست آورید.

Angle	Angle
34° 26' 56"	34° 26' 58"
34° 27' 04"	34° 26' 59"
34° 27' 03"	34° 27' 04"

روش اول: میانگین

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 34° \, 27' \, 00.7''$$

روش دوم: انتخاب یک مقدار مانند α' که شامل هیچ یک از مشاهدات انجام شده نباشد.

$$\alpha' = 34° \, 27' \, 00'' \Rightarrow \bar{\alpha} = \alpha' + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha') = 34° \;\; 27' \;\; 00.7''$$

مثال: نمونه تصادفی $f = \{ 1,2,3,4,5,5,1,2,1,3,1 \}$ را در نظر بگیرید، مطلوب است میانگین این نمونه‌ها با در نظر گرفتن فراوانی آن‌ها.

$$n = 11$$

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \times x_i = (1 \times \frac{4}{11} + 2 \times \frac{2}{11} + 3 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{1}{11} + 5 \times \frac{2}{11}) = \frac{28}{11} = 2.54$$

نمایش ترسیمی (نمایش وضعیت نمونه‌ها)

برای نمایش و ارزیابی کمیت‌های مورد اندازه‌گیری و نحوه پراکندگی اندازه‌ها و نیز تعیین اینکه کدامیک از مشاهدات مورد قبول و کدامیک باید از بین مشاهدات حذف شوند احتیاج به ترسیم هیستوگرام[1] و پلیگون[2] می‌باشد.

هر نمونه اندازه‌گیری با n عضو (که آن را سایز نمونه گویند) می‌تواند به تعدادی کلاس[3] با n_i عضو که $n_i<n$ است تقسیم شود. (n_i , n عددی صحیح می‌باشد)

این نمونه دارای حداقل و حداکثر مقدار است که اگر این دو را از هم کم کنیم حاصل را وسعت نمونه[4] یا همان برد نمونه گویند. یعنی اگر نمونه را به صورت صعودی مرتب کنیم، وسعت نمونه از رابطه ذیل بدست خواهد آمد.

$R = L_1 - L_n$ یا $R = L_{max} - L_{min}$

[1] Histogram
[2] Polygon
[3] Class
[4] Range

حال می‌توان وسعت نمونه را به k فاصله مساوی و کوچک (d) که به آن class interval گفته می‌شود و با k+1 مرز کلاس[1] تقسیم نمود.

انتخاب k نقش مهمی در ارزیابی کمیت‌ها دارد.

اختلاف بین مرز بالا و مرز پایین هر کلاس را عرض کلاس[2] گویند که آن را با d نشان می‌دهیم. و تعداد اعضای هر کلاس را اندازه کلاس یا فرکانس کلاس یا فراوانی کلاس(n_i) می‌گویند. به اعمال فوق، طبقه بندی یک نمونه گویند.

مد[3]: نمونه‌ای که بیشترین تکرار را دارد.

میانه[4]: زمانی که تمام نمونه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید مقدار میانی نمونه‌ها را میانه گویند.

الف) اگر تعدادی اعضای نمونه فرد باشد: $\mathrm{Median}(L)=L_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

ب) اگر تعداد اعضای نمونه زوج باشد. $\mathrm{Median}(L)=\frac{1}{2}(L_{\frac{n}{2}}+L_{\frac{n}{2}+1})$

اگر فاصله دو عضو از نمونه a تا b را بخواهیم تعریف کنیم، این فاصله به صورت زیر خواهد بود.

۱) فاصله باز تا باز: که به صورت a<x<b=(a,b) نشان داده می‌شود. در اینجا کلاس تنها شامل مقادیر بین b,a می‌شود و شامل خود a,b نمی‌شود.

۲) فاصله بسته تا بسته: که به صورت $a\le x\le b=[a,b]$ نشان داده می‌شود. که کلاس شامل مقادیر بین b,a و نیز خود a,b می‌شود.

۳) فاصله باز و بسته: که به صورت $a<x\le b=(a,b]$ نشان داده می‌شود. در اینجا کلاس شامل b می‌شود ولی شامل a نمی‌شود.

۴) فاصله بسته و باز: که به صورت $a\le x<b=[a,b)$ نشان داده می‌شود. در اینجا کلاس شامل a می‌شود ولی شامل b نمی‌شود.

مراحل ترسیم هیستوگرام

۱- محاسبه برد نمونه‌ها (range):

$$R=L_{\max}-L_{\min}$$

۲- انتخاب تعداد اینتروالها (k):

با انتخاب k عرض هر کلاس بدست خواهد آمد $d=\frac{R}{k}$

۳- تعیین مد و میانه :

۴- کلاس بندی[1]:

[1] Class Boundaries
[2] Class Width
[3] Mode
[4] Median

طبق تعاریف فاصله b,a از نمونه را با توجه به عرض هر کلاس می‌توان به صورت زیر تقسیم نمود.

$R=[a,b]\Rightarrow[a,a+d],(a+d,a+2d],\dots,(b-d,b]$

۵- محاسبه سایز کلاس‌ها (n_i) یا فراوانی هر کلاس:

برای این منظور باید به نمونه‌ها نگاه کنیم و بازه بسته و باز هر کلاس تا ببینیم که چه تعدادی از نمونه‌ها در هر کلاس قرار می‌گیرند.

۶- رسم محورها و مستطیل نشان دهنده عرض و فراوانی هر کلاس:

دو محور عمود بر هم ترسیم می‌کنیم که محور افقی جهت مشخص کردن دامنه هر کلاس و محور قائم نشان دهنده اندازه کلاس‌ها خواهد بود و به کمک هر کدام از محورها برای هر کلاس مستطیلی ترسیم می‌شود که عرض آن عرض کلاس (d) و ارتفاع آن سایز هر کلاس (n_i) را نشان می‌دهد.

سطح کل زیر هیستوگرام $S=\left(\sum_{i=1}^{n}n_i\right)\times d$ خواهد بود.

توجه: برای اینکه تئوری آمار و احتمالات تأمین شود باید مجموع زیر نمودار هیستوگرام برابر یک شود. برای این منظور باید اندازه هر کلاس را فراوانی نسبی یا فرکانس نسبی کلاس در نظر گرفت.

$$S=\left(\sum_{i=1}^{n}n_i\right)\times d \quad , \qquad \tilde{n}_i=\frac{n_i}{S}\Rightarrow\tilde{S}=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{n}_i\right)\times d=1$$

S: سطح زیر هیستوگرام

$\tilde{n}_i$: فراوانی نسبی دسته iام

$\tilde{S}$: سطح زیر هیستوگرام که از فراوانی نسبی برای بدست آوردن آن استفاده شده که کل این سطح برابر یک می‌باشد.

احتمال: احتمال هر فاصله فرعی، از فاصله کل همیشه عددی است بین صفر و یک

$0\le p(a\le x\le b)\le 1$

نکته: برای محاسبه احتمال یک فاصله : باید کلاسه بندی بخوبی انجام شود، طوری که فاصله مورد نظر را در بر بگیرد. برای اینکه به احتمال خواسته شده نزدیکتر شویم.

عضو هر کلاس حتی الامکان با اعضای خود نمونه تلاقی نداشته باشد.

مثال: هیستوگرام نمونه زیر را با فرض k=4 ترسیم و $p(6\le x\le 10)$ را محاسبه کنید.

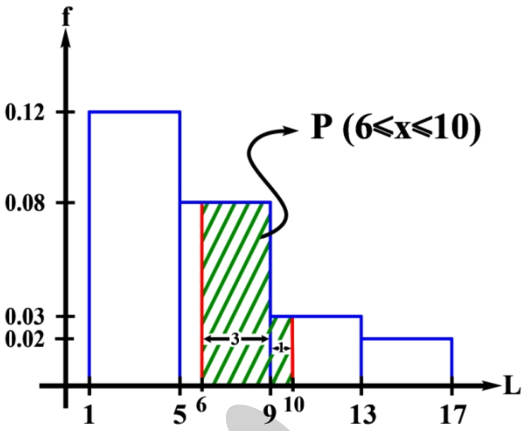
$L=\{17, 3, 8, 1, 5, 2, 4, 6, 15, 9, 8, 2, 3, 10, 9, 11, 12, 4, 5, 8, 6, 7, 4, 5, 3\}$

$\Rightarrow n=25 \qquad R=L_{\max}-L_{\min}=17-1=16 \quad , \quad K=4\Rightarrow d=\frac{R}{K}=\frac{16}{4}=4$

$n_1=[1,5]=12,\quad n_2=(5,9]=8,\qquad n_3=(9,13]=3,\qquad n_4=(13,17]=2$

---

[1] Classification



احتمال از روی هیستوگرام

$$S=(n_1+n_2+n_3+n_4)\times d \Rightarrow 25\times 4=100$$

$$\tilde{n}_1=\frac{12}{100},\ \tilde{n}_2=\frac{8}{100},\ \tilde{n}_3=\frac{3}{100},\ \tilde{n}_4=\frac{2}{100}$$

$$p(6\le x\le 10)=p(6\le x\le 9)+p(9<x\le 10)=$$
$$\Rightarrow p(6\le x\le 10)=3\times 0.08+1\times 0.03=0.27$$

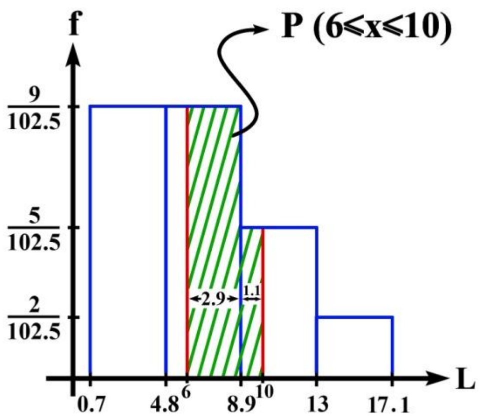
$$p(6\le x\le 10)=\frac{n_i}{n}=\frac{9}{25}=0.36$$ احتمال واقعی

n_i: تعداد نمونه‌ها در بازه (۶ تا ۱۰)

n: تعداد کل نمونه‌ها

اختلاف بین احتمال بدست آمده از هیستوگرام (0.27) و احتمال محاسباتی از روی نمونه‌ها (0.36) ناشی از کلاس بندی می‌باشد.

مثال: در مثال قبل بجای d=4 فرض کنید d=4.11 و شروع کلاسه بندی را هم از 0.7 فرض کنید و مسئله را دوباره حل کنید و مقایسه‌ای با مثال قبل داشته باشید.



$$n_1=[0.7,4.8]=9 \qquad n_2=(4.8,8.9]=9$$
$$n_3=(8.9,13]=5 \qquad n_4=(13,17.1]=2$$
$$S=(\sum_{i=1}^{n} n_i)d=25\times 4.11=102.5$$
$$\tilde{n}_1=\frac{9}{102.5} \quad \tilde{n}_2=\frac{9}{102.5} \quad \tilde{n}_3=\frac{5}{102.5} \quad \tilde{n}_4=\frac{2}{102.5}$$
$$\tilde{S}=(\sum_{i=1}^{n}\tilde{n}_i).d=\frac{25}{102.5}\times 4.1=0.999\cong 1$$
$$P(6\le x\le 10)=p(6\le x\le 8.9)+p(8.9<x\le 10)$$
$$=(8.9-6)\times\frac{9}{102.5}+(10-8.9)\times\frac{5}{102.5}=0.3063$$

با مقایسه این مقدار بدست آمده با مقدار واقعی 0.36 نشان دهنده این مطلب است که طبقه بندی در حالت دوم، مطلوب‌تر از حالت اول بوده.

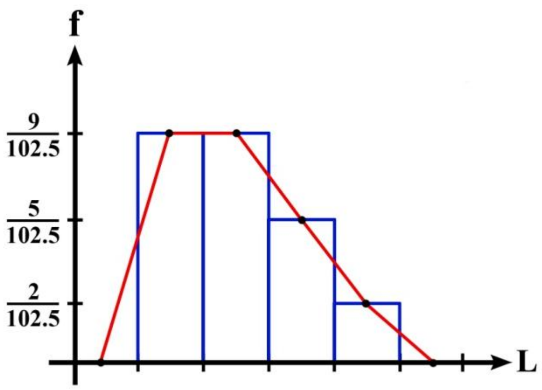
مراحل ترسیم پلیگون[1]

[1] Polygons Drawing Process

۱- چنانچه در وسط قاعده‌های فوقانی مستطیل‌ها (میانه کلاس‌ها) نقاطی ایجاد کنیم و آن‌ها را با خط به هم وصل کنیم. خطوط شکسته‌ای ایجاد می‌شود که به آن پلیگون گفته می‌شود.

۲- از آنجایی که سطح هیستوگرام برابر یک است، پس باید سطح پلیگون نیز برابر یک باشد بدین منظور دو فاصله به ابتدا و انتهای نمودار اضافه می‌کنیم و سپس وسط این دو فاصله را به ابتدا و انتهای پلیگون وصل می‌کنیم در نتیجه پلیگون بسته‌ای ایجاد خواهد شد با سطح واحد.

مثال: پلیگون هیستوگرام مثال قبل را ترسیم کنید.



امید ریاضی[1] (E)

در حقیقت امید ریاضی یک اپراتور خطی است که متوسط گیری وزن دار را انجام می‌دهد.

فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه n تایی از یک جامعه باشند، داریم:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}[x_1 + x_2 + ... + x_n] = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + ... + \frac{1}{n}x_n$$

احتمال وقوع هر یک از متغیرهای تصادفی (x) برابر $\frac{1}{n}$ می‌باشد $(p(x_i) = \frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \bar{x} = p(x_1)x_1 + p(x_2)x_2 + ... + p(x_n)x_n \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \times x_i$$

به رابطه‌ای که به صورت $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \times x_i$ باشد امید ریاضی گفته می‌شود.

امید ریاضی متغیری مانند x را با E(x) نشان می‌دهند.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \times x_i = \mu_x$$

مثال: امید ریاضی مجموعه داده‌های زیر را بدست آورید.

[1] Mathematical Expectation

x_i	f_i	$p(x_i)$
2	3	$\frac{3}{23}$
3	1	$\frac{1}{23}$
5	5	$\frac{5}{23}$
1	6	$\frac{6}{23}$
4	8	$\frac{8}{23}$

$$\bar{x} = \frac{2\times3+3\times1+5\times5+1\times6+4\times8}{23} = \frac{72}{23}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{23}\times2+\frac{1}{23}\times3+\frac{5}{23}\times5+\frac{6}{23}\times1+\frac{8}{23}\times4 = \frac{72}{23} \Rightarrow E(x) = \frac{72}{23}$$

خواص امید ریاضی :

امید ریاضی متغیرهای پیوسته

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

امید ریاضی یک اپراتور خطی است.

1) $E(C) = C$
2) $E[E(x)] = E(x)$
3) $E[c.x] = c.E(x)$
4) $E[x+y] = E(x)+E(y)$
5) $E[xy] = E(x)\times E(y)$

C: یک مقدار ثابت عددی.

زمانی رابطه ۵ بر قرار است که دو متغیر x وy مستقل از هم باشند.

مثال: اگر سه متغیر تصادفی y,x و z مستقل از هم باشند و G=4x+3yz-5 باشد و امید ریاضی z,y,x معلوم بوده و به ترتیب برابر μ_x, μ_y, μ_z باشد مطلوب است امید ریاضی G .

$$G = 4x+3yz-5 \Rightarrow E(G) = 4E(x)+3E(yz)-5$$
$$\Rightarrow E(G) = 4E(x)+3E(y)E(Z)-5 \Rightarrow \mu_G = 4\mu_x + 3\mu_y\mu_z - 5$$

واریانس [1] نمونه

یکی از شاخص‌های پراکندگی است و میزان پراکندگی نمونه‌ها حول مقدار واقعی یا مقدار میانگین را نشان می‌دهد.

واریانس جامعه را با σ^2 (سیگما کوچک) و واریانس نمونه را با s^2 نشان می‌دهیم.

با یک مثال واریانس را توضیح خواهیم داد.

مثال: واریانس دو نمونه زیر را حساب کنید.

[1] Variance

مرحله اول: میانگین دو نمونه را محاسبه می‌کنیم.

x	80.01	80.03	80.02
y	79.80	80.00	80.20

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{3}\times 240.06=80.02$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{3}\times 240=80.00$$

مرحله دوم: اختلاف داده‌ها از میانگین را بدست می‌آوریم.

$$x_i-\bar{x}: -0.01 \quad , \quad +0.01 \quad , \quad 0.00$$

$$y_i-\bar{y}: -0.20 \quad , \quad 0.00 \quad , \quad +0.20$$

نکته: می‌توان نتیجه گرفت که همواره $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$ می‌شود و همدیگر را خنثی می‌کنند.

پس با این روش نمی‌توان پراکندگی را مشخص کرد. پس برای رفع این مشکل، توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها یعنی $(x_i-\bar{x})^2$ را در نظر می‌گیریم. سپس این عبارت را با هم جمع کرده و بر تعدادشان تقسیم می‌کنیم (میانگین گیری) عبارتی که بدست می‌آید واریانس نام دارد.

$$\mathrm{var}(x)=\sigma_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2$$

$$(x_i-\bar{x})^2: \ 0.001 \quad , \quad 0.001 \quad , \quad 0.00$$

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{3}(0.0001+0.0001+0)=\frac{0.0002}{3}=\frac{2}{30000}=\frac{1}{15000}(m^2)$$

$$(y_i-\bar{y})^2: \ 0.04 \quad , \quad 0.00 \quad , \quad 0.04$$

$$\sigma_y{}^2=\frac{1}{3}(0.04+0+0.04)=\frac{0.08}{3}=\frac{8}{300}=\frac{2}{75}(m^2)$$

تعریف واریانس بر اساس امید ریاضی برابر است با:

در حالت گسسته:

$$\sigma_x{}^2=E[(x-\mu_x)^2]=E[(x-E(x))^2]=E(x^2)-[E(x)]^2$$

در حالت پیوسته:

$$\sigma_x{}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 f(x)dx$$

تمرین: اثبات کنید که $\sigma_x{}^2=E(x^2)-[E(x)]^2$

$$\sigma_x{}^2=E[(x-E(x))^2]=E(x^2-2xE(x)+(E(x))^2)=E(x^2)-2E(x)E(x)+(E(x))^2$$

$$=E(x^2)-2(E(x))^2+(E(x))^2 \Rightarrow \sigma_x{}^2=E(x^2)-(E(x))^2$$

واریانس برای مشاهداتی که نامحدود باشند $(n\to\infty)$ برابر است با:

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i^2$$

اما وقتی n محدود باشد σ^2 تبدیل به S^2، یعنی واریانس جامعه به واریانس نمونه تبدیل می‌شود. لذا ضریب

$\frac{1}{n}$ به $\frac{1}{n-1}$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

انحراف معیار یا انحراف استاندارد (s.d)[1]

جذر واریانس را انحراف استاندارد یا خطای معیار گفته می‌شود و آن را با σ (برای جامعه) یا S (برای نمونه) نشان می‌دهیم. این پارامتر بیان کننده دقت یا خطای مطلق کمیت می‌باشد یا خطای متوسط هندسی

مثال: انحراف استاندارد مشاهدات زیر را بدست آورید.

x_i	v_i^2
16.53	0.009025
16.32	0.01322
16.43	$2.5e^{-5}$
16.48	$2.025e^{-3}$
16.38	$3.025e^{-3}$
16.40	$1.225e^{-3}$
16.44	$2.5e^{-5}$
16.50	$4.225e^{-3}$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=16.435$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=0.0684$$

اثبات اینکه فرمول انحراف معیار جامعه $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n}}$ و انحراف معیار نمونه $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}$ می‌باشد:

اگر x مقدار واقعی کمیت و $\bar{x}$ مقدار میانگین باشد داریم

α : مقدار خطای میانگین

$$\alpha=\bar{x}-x$$

v_i : مقدار خطای ظاهری (باقیمانده)

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

e_i : مقدار خطای واقعی

$$e_i=x_i-x$$

$\Rightarrow$ جامعه معیار انحراف $=\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n}}$

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}v_i=0\Rightarrow$ خطای میانگین صفر خواهد بود

[1] Standard Deviation

$$e_i = x_i - x = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x) = v_i + \alpha \quad \Rightarrow \quad e_i^2 = v_i^{\,2} + \alpha^2 + 2\alpha v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2} + n\alpha^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^{n} v_i \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2} \qquad ((1))$$

$$e_i = v_i + \alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} v_i + n\alpha \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)^2 = n^2\alpha^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)^2 \approx \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = n^2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2}\right) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad ((2))$$

$$\xrightarrow{((1)) = ((2))} \sigma^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2} = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma^2(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n-1} = S^2 \Rightarrow \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n-1}}$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) هرگاه کمیتی به تعداد n بار اندازه‌گیری شود و به کمک میانگین گیری مقدار آن تعیین شود، خطای مقدار بدست آمده $\sqrt{n}$ مرتبه کوچکتر از مقدار خطای هر یک از اندازه‌گیری‌ها است.

۲) وقتی تعداد اندازه‌گیری‌ها به سمت بی نهایت میل کند مقدار خطای میانگین به سمت صفر میل خواهد کرد.

فرمول ساده شده انحراف معیار

از فرمول زیر می‌توان به طور مستقیم از مشاهدات به انحراف معیار رسید.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \Rightarrow S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n-1}}$$

مثال: انحراف معیار مشاهدات مثال قبل را با استفاده از این فرمول بدست آورید.

خطای مطلق[1] و خطای نسبی[2]

خطای مطلق به تفاضل مقدار واقعی (x) و مقدار اندازه‌گیری شده کمیت (x_i) گفته می‌شود. این تعریف در مورد خطاهای تصادفی به خطای معیار (انحراف معیار) و در مورد خطاهای تدریجی به قدر مطلق تفاضل گفته می‌شود.

به خارج قسمت خطای مطلق (تنها خطای تصادفی) بر مقدار واقعی کمیت خطای نسبی گفته می‌شود.

$$e_R = \frac{\sigma_L}{L}$$

معمولاً در خطای نسبی صورت کسر 1 و مخرج مضربی از 1000 می‌باشد. واحد بیان این خطا P.P.M[3] است و مفهوم آن یک واحد از یک میلیون می‌باشد.

مثال: وقتی گفته می‌شود دقت نسبی دستگاه طولیابی 7^{ppm} است یعنی چه و برای طول 5^{km} مقدار خطای مطلق آن چقدر خواهد بود.

یعنی این دستگاه به ازاء هر 1000000 واحد 7 واحد خطا خواهد داشت.

$$e_R = \frac{\sigma_L}{L} = 7^{ppm} = \frac{7}{1000000} \quad \Rightarrow \frac{7}{1000000} = \frac{\sigma_L}{5000000} \quad \Rightarrow \quad \sigma_L = 35^{mm}$$

خطای نسبی میزان دقت در عملیات اندازه‌گیری را تعین می‌کند. در صورت معلوم بودن دقت نسبی (حداکثر خطای نسبی مجاز) حد خطای مجاز در عملیات معلوم می‌شود و تا حدی می‌توان وسایل مورد نیاز و روش اندازه‌گیری را مشخص نمود. که این باعث می‌شود به دقت مورد نظر برسیم بدون استفاده غیر لازم از دستگاه‌های دقیق و گران قیمت در صورت امکان.

نکته: در نقشه برداری وزن مشاهدات (p) را می‌توان معکوس واریانس آن‌ها در نظر گرفت.

$$p = (\frac{1}{\sigma^2})$$

میانگین گیری وزن دار[4]

در میانگین گیری نمونه‌هایی که دارای فراوانی بودند ما فراوانی را به عنوان وزن در نظر می‌گرفتیم اما در مشاهدات نقشه برداری بجای فراوانی، وزن خود مشاهده را $(\frac{1}{\sigma^2})$ به عنوان وزن آن لحاظ می‌کنیم.

---
[1] Absolute Error
[2] Relative Error
[3] Parts Per Million
[4] Weighted Mean

$$\bar{x} = \frac{p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \ldots + p_n \times x_n}{p_1 + p_2 + \ldots. + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

مثال: اندازه‌گیری‌های زیر برای یک طول بر روی عکس هوایی انجام گرفته (همه اندازه‌گیری‌ها دارای وزن یکسان هستند) مطلوب است انحراف معیار مشاهدات.

Number	Observation	Number	Observation
L_1	105.27	L_5	105.26
L_2	105.26	L_7	105.28
L_3	105.29	L_8	105.28
L_4	105.30	L_9	105.25
L_5	105.27	L_{10}	105.29

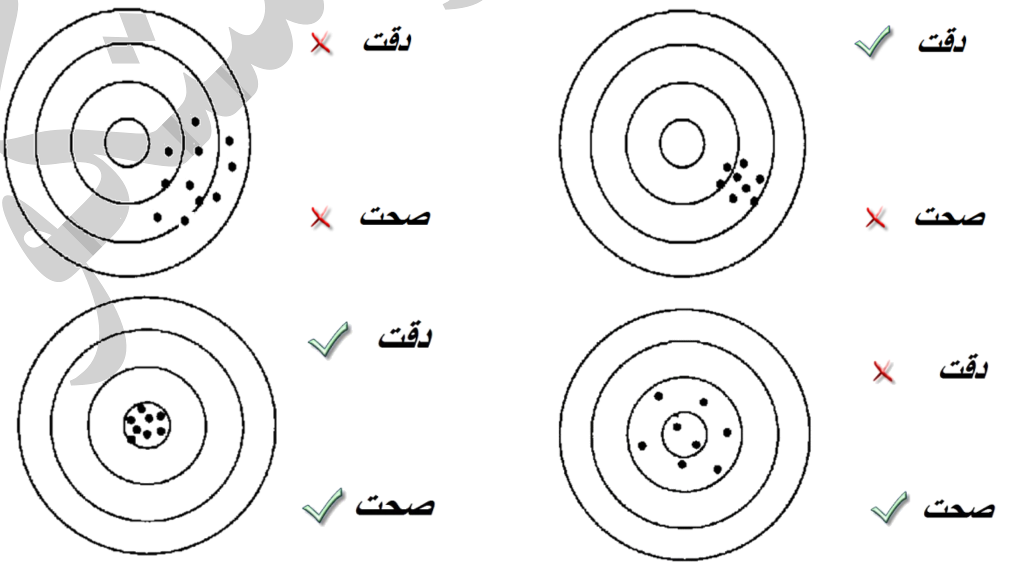
$$\bar{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = 105.275 \qquad v_i = L_i - \bar{L}$$ باقیمانده‌ها

$$S = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^{\,2}}{n-1}} = \pm 0.0158_{mm} \approx \pm 0.05mm$$

صحت و دقت[1]

دقت: معیاری برای بیان قابلیت تکرار شوندگی مشاهدات بوده، در نتیجه تنها نشان دهنده خطای تصادفی است.

صحت: میزان نزدیکی مشاهدات به مقدار واقعی را بیان می‌کند.



[1] Accuracy & Precision

کواریانس[1] یا وابستگی[2]

کواریانس میزان وابستگی دو متغیر را به هم نشان می‌دهد.

کواریانس هر دو متغیر تصادفی y,x به صورت cov(x,y) نوشته می‌شود (یا به صورت σ_{xy} برای جامعه و s_{xy} برای نمونه نوشته می‌شود) و به فرم زیر تعریف می‌گردد.

$$S_{xy} = \mathrm{cov}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = E((x - E(x))(y - E(y)))$$

$$\sigma_{xy} = \mathrm{cov}_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_x)(y - \mu_y)dxdy$$

مثال: کواریانس بین دو متغیر y,x را بدست آورید.

$$x = \{1,2,3,4\} \Rightarrow \bar{x} = 2.5$$

$$y = \{3,5,4,4\} \Rightarrow \bar{y} = 4$$

$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
-1.5	-1	1.5
-0.5	1	-0.5
+0.5	0	0
+1.5	0	0

$$\Rightarrow s_{xy} = \frac{1}{4}$$

و همچنین داریم:

$$\mathrm{cov}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\mathrm{cov}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\,\bar{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i + \bar{x}\,\bar{y} \Rightarrow \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y} \Rightarrow \mathrm{cov}_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$$

مثال: مثال قبل را با استفاده از فرمول کواریانس ساده شده محاسبه کنید.

x	y	x.y
1	3	3
2	5	10
3	4	12
4	4	16
$\bar{x} = 2.5$	$\bar{y} = 4$	$\overline{xy} = 10.25$

$$\Rightarrow S_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} = 1025 - (4 \times 2.5) = 10.25 - 10 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

[1] Covariance
[2] Correlation

در نقشه برداری فرض بر این است که مشاهدات مستقل از هم هستند چون محاسبه کواریانس بین آن‌ها مشکل است. برای این منظور مشاهدات را در شرایط مستقل فیزیکی انجام می‌دهیم.

نکته: یکی از عواملی که باعث ایجاد کواریانس بین مشاهدات می‌گردد خطای سیستماتیک می‌باشد.

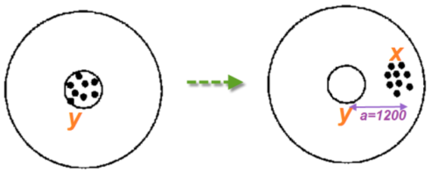
خواص واریانس:

$1)\ \mathrm{var}(x+a)=\mathrm{var}(x)$

$x:\ 1200\ ,\ 1205\ ,\ 1203$

$y:\ 0.00\ ,\ 5.00\ ,\ 3.00$

$y=x-1200 \Rightarrow$



نتیجه: خطای سیستماتیک تأثیری در دقت مشاهدات ندارد و فقط صحت را تغییر می‌دهد.

$\sigma_x{}^2=\sigma_y{}^2=\sigma^2(x+1200)$

$2)\ \mathrm{var}(ax)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i-a\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-\bar{x})^2=a^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$\Rightarrow \mathrm{var}(ax)=a^2\,\mathrm{var}(x)$

$3)\sigma ax=a\sigma x$

خواص کواریانس:

$1)\ \mathrm{cov}(x,c)=0$

$2)\ \mathrm{cov}(x,x)=\mathrm{var}(x)=\sigma_x{}^2$

$3)\ \mathrm{cov}(x_1+x_2,y)=\mathrm{cov}(x_1,y)+\mathrm{cov}(x_2,y)$

$4)\ \mathrm{cov}(ax+b,cy+d)=a\times c\times \mathrm{cov}(x,y)$

$5)\ \mathrm{cov}(x,y)=\mathrm{cov}(y,x)$

تعریف کواریانس بر اساس امید ریاضی:

$\sigma_{xy}=E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$

مثال: اثبات کنید که کواریانس دو متغیر تصادفی برابر است با:

$\mathrm{cov}(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)$

$\mathrm{cov}(x,y)=E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]=E[(x-E(x))(y-E(y))]$

$\Rightarrow E[(xy-xE(y)-yE(x)+E(x)E(y)]\Rightarrow$

$=E(xy)-E(x)E(y)-E(y)E(x)+E(x)E(y)=E(xy)-E(x)E(y)$

مثال: چنانچه تابعی مانند z=f(x,y) داشته باشیم و شکل این تابع به صورت z=x+y تعریف شده باشد. کواریانس دو متغیر را بدست آورده و روی آن بحث کنید.

$S_Z^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2=E(z-\bar{z})^2$

$S_Z^2=E[(x+y)-(\bar{x}+\bar{y})]^2=E[x+y-\bar{x}-\bar{y}]^2=E[(x-\bar{x})+(y-\bar{y})]^2$

$S_Z^2=E(x-\bar{x})^2+2E(x-\bar{x})E(y-\bar{y})+E(y-\bar{y})^2=S_x^2+2S_XS_Y+S_y^2$

$\Rightarrow S_Z^2=S_x^2+S_y^2+2S_{xy}\Rightarrow S_{xy}=\frac{S_Z^2-(S_x^2+S_y^2)}{2}$

نکته: رابطه بالا نشان می‌دهد که واریانس تابع z علاوه بر وابستگی به واریانس متغیرها، بـه عامـل دیگـری بنـام

کواریانس‌ها نیز بستگی دارد.

با توجه به مثال فوق در می‌یابیم که واریانس حاصل جمع دو متغیر تصادفی y,x برابر است با:

$$\mathrm{var}(x+y)=\mathrm{var}(x)+\mathrm{var}(y)+2\,\mathrm{cov}(x,y)$$

نکته:

$$\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n}x_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(x_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(x_i,x_j)$$

حال اگر $x_1,x_2,\ldots,x_n$ دو به دو مستقل از هم باشند کواریانس نخواهیم داشت پس داریم.

$$\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n}x_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(x_i)$$

مثال: سه نمونه به صورت زیر وجود دارد. کواریانس موجود بین هر دو نمونه را بدست آورید.

X_1	X_2	X_3
1	6	11
2	7	12
3	8	13
4	9	14
5	10	15
$\bar{x}_1=3$	$\bar{x}_2=8$	$\bar{x}_3=13$

$$s_{x_1x_2}=s_{x_2x_1}=E(x_{1i}-\mu_{x_1})(x_{2i}-\mu_{x_2})$$

$$s_{x_1x_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)=\frac{1}{5}[(1-3)(6-8)+(2-3)(7-8)+$$
$$(3-3)(8-8)+(4-3)(9-8)+(5-3)(10-8)]=2$$

$$\Rightarrow S_{X_1X_2}=S_{X_2X_1}=2 \qquad S_{X_1X_3}=S_{X_3X_1}=2 \qquad S_{X_2X_3}=S_{X_3X_1}=2$$

نکته: برای محاسبه کواریانس باید تعداد اعضاء دو متغیر y,x با هم برابر باشد و جای هر کدام از اعضا مشخص باشد و تغییری در مکان آن‌ها حاصل نشود.

تمرین: مطلوب است محاسبه واریانس و کواریانس چند نمونه زیر:

$x_1=(2,3,4,7,4)$ $\qquad$ $x_2=(6,4,0,3,2)$ $\qquad$ $x_3=(5,2,5,5,8)$

$$\begin{bmatrix}2.8 & -1.4 & 0.6\\ -1.4 & 4 & -1.2\\ 0.6 & -1.2 & 3.6\end{bmatrix}$$

ضریب وابستگی[1]

در تعریف کواریانس گفتیم که کواریانس نشانگر وابستگی بین دو متغیر می‌باشد اما کواریانس در بیان وابستگی محدودیت‌هایی دارد مثلاً: کواریانس می‌تواند هر عددی باشد و نمی‌توان آن را در حالت ماکسیمم گفت که دارای وابستگی کامل است پس نیاز داریم به تعریف یک ضریب وابستگی که آن را با $\rho_{x,y}$ نشان می‌دهند و مقدار آن

[1] Correlation Coefficient

بین ۱ تا ۱- خواهد بود و از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\rho_{x,y}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=E\left[\frac{(x-E(x))}{S_x}\times\frac{(y-E(y))}{S_y}\right]$$

خواص ضریب وابستگی (ρ)

$$1)\ -1\le\rho\le1$$

$$2)\ \rho(ax+b,cy+d)=\rho(x,y)$$

گفتیم که ضریب وابستگی عددی است بین 1+ تا 1- و بر این اساس چهار حالت زیر را می‌توان مطرح کرد:

$$1)\ if\quad \rho_{x,y}=+1$$

دو کمیت y,x به صورت صد درصد بطور مثبت بهم وابسته‌اند.

$$2)\ if\quad \rho_{x,y}=-1$$

دو کمیت y,x به صورت صد درصد بطور منفی بهم وابسته‌اند.

$$3)\ if\quad \rho_{x,y}\in(-1,+1)$$

دو کمیت وابسته‌اند و مقدار و علامت آن بستگی به مقدار ρ دارد.

$$4)\ if\quad \rho_{x,y}=0$$

دو کمیت کاملاً مستقل از هم هستند (کواریانس ندارد).

مثال: برای نمونه‌های زیر میزان ضریب همبستگی را حساب کنید.

X_1	1	2	3	4
X_2	3	5	4	4

$$\bar{x}_1=2.5$$
$$\bar{x}_2=4$$

$$\overline{x_1x_2}=10.25$$

$$\operatorname{cov}_{x_1x_2}=\overline{x_1\,x_2}-\bar{x}_1\bar{x}_2=10.25-10=0.25$$

$$\sigma_{x_1}^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_1)^2=1.25\qquad \sigma_{x_2}^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_2)^2=0.5$$

$$\Rightarrow\rho_{x_1x_2}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}\times\sigma_{x_2}}=\frac{0.25}{\sqrt{1.25}\times\sqrt{0.5}}=0.3162$$

دو متغیر وابستگی دارند و وابستگی آن‌ها مثبت است.

تمرین: مطلوب است تعیین درجه همبستگی بین نمونه‌های $(x_3,x_1),(x_2,x_3),(x_2,x_1)$.

$$x_1=(2,1,3,5,4)\qquad x_2(3,-1,5,2,2)\qquad x_3=(-5,-6,-3,-4,-3)$$

ماتریس واریانس- کواریانس[1]:

در حالت n بعدی (n مشاهده داشته باشیم) داریم: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

برای بردار x یک ماتریس مربع متقارن $n\times n$ خواهیم داشت که عناصر قطر اصلی آن واریانس x_iها و سایر عناصر آن به صورت قرینه نسبت به قطر اصلی، کواریانس‌های بین x_iها باشد. این ماتریس را ماتریس واریانس – کواریانس x می‌نامیم و آن را با C_{xx} یا $\sum_{xx}$ نشان خواهیم داد.

مثال: ماتریس واریانس کواریانس مثال قبل را محاسبه کنید.

$$\sum_{xx}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2}\\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2\end{bmatrix}_{n\times n}=\begin{bmatrix}5 & 0.25\\ 0.25 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

نکته: در نقشه برداری فرض بر این است که مشاهدات مستقل از هم بوده در نتیجه کواریانس بین آن‌ها صفر خواهد بود و $\sum_{xx}$ مشاهدات یک ماتریس قطری خواهد بود که عناصر قطر اصلی آن را واریانس مشاهدات تشکیل می‌دهد.

$$\sigma_{x_ix_j}=0\Rightarrow\sum{}_{xx}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n}^2\end{bmatrix}_{n\times n}$$

نکته: چون مشاهدات ما ممکن است از دو جنس متفاوت (زاویه و طول) باشد پس برای اینکه ماتریس واریانس کواریانس ما صحیح باشد (یک واحد داشته باشد) زوایا را باید بر حسب رادیان وارد کرد.

$$\frac{R}{2\pi}=\frac{D}{360}=\frac{G}{400}\Rightarrow R=\frac{2\pi D}{360}\Rightarrow R=D\times{}^{\pi}\!/_{180}$$

از آنجایی که معمولاً دقت زوایا بر حسب ثانیه بیان می‌شود. پس رابطه تبدیل ثانیه به رادیان را بدست می‌آوریم.

$1^\circ=3600''\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{R}{2\pi}=\frac{D}{360}=\frac{S}{360\times3600}\Rightarrow R=\frac{S\times\pi}{180\times3600}=S\times4.848e^{-6}=\frac{S}{206264.8}\approx\frac{S}{206265}$$

تمرین: چند نمونه که مستقل نیز نیستند ماتریس واریانس کواریانس آن‌ها را بیابید.

$L_1=(4.2,\ 3.6,\ 5.1,\ 3.8)\quad L_2=(-3.1,\ -3.8,\ -4,\ 3.5)\quad L_3=(3,\ 4,\ 5,\ 4.5)$

[1] Variance-Covariance Matrix

توابع پخش خطا (E.D.F)[1]

گفتیم که پس از حذف خطای فاحش و سیستماتیک، یک خطا مشاهده می‌شود که منشاء معینی ندارد. به این دلیل دستیابی به واقعیت کمیت غیرممکن است. لذا بایستی با اعمال روشهایی مقدار جابجایی خطا و چگونگی آن‌ها را معین نمود و با بررسی‌های آماری محدوده‌ای را برای بهترین مقدار یک کمیت مشخص نمود. برای این کار از توابع توزیع خطا استفاده می‌کنیم.

بر اساس تجربه مشخص گردیده که توزیع خطای تصادفی خود را به شکل منحنی زنگوله‌ای نشان می‌دهد. (یعنی تعداد و مقدار خطاهای تصادفی که با علامت مثبت و منفی ظاهر می‌شوند با هم برابر بوده) این نوع توابع که نشان دهنده این خطاها هستند به توابع گوس (گوسین) معروف هستند.

تابع توزیع گوس:

Johann Carl Friedrich Gauss

Born:1777 Brunswick, Germany

Died: February 23, 1855, Göttingen, Germany

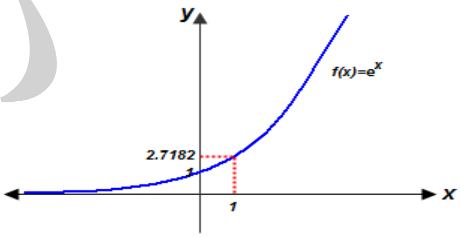
By the age of eight during arithmetic class he astonished his teachers by being able to instantly find the sum of the first hundred integers.

این تابع، یک تابع زنگوله‌ای است برای خطای تصادفی مشاهدات. و رابطه آن به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) = ae^{-b^2x^2}$$

b,a ضرایبی هستند که بعداً محاسبه می‌شوند و e عدد نپر است (e=2.7182). پس تابع گوس یک تابع از نوع نمایی است.

$e^x \Rightarrow$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-b^2x^2}dx = 1 \qquad , \qquad a = \frac{b}{\sqrt{\pi}}$$

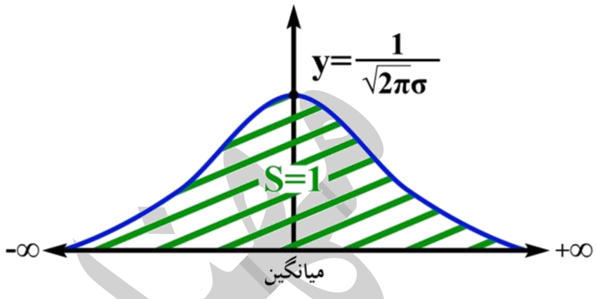
[1] Error Distribution Function

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2ydy=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\times\frac{b}{\sqrt{\pi}}e^{-b^2x^2}dx \qquad , \qquad b=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$\Rightarrow y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$ معادله تابع توزیع گوس

نکته: مقدار ماکزیمم تابع در رابطه y در نقطه صفر خواهد بود.

$$y_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$



به علت متقارن بودن خطاها میانگین خطا برابر صفر خواهد بود.

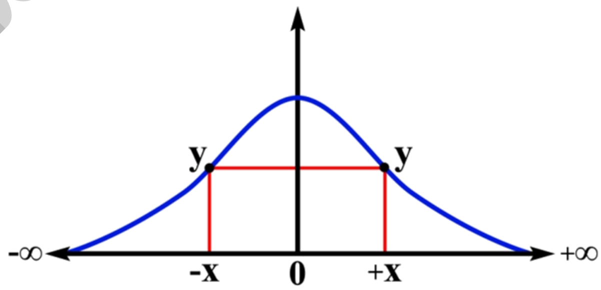
خواص تابع چگالی گوس[1]:

۱) مساحت زیر منحنی همواره مساوی یک است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

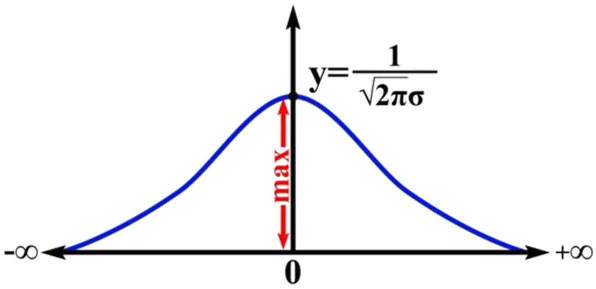
۲) تابع گوس حول $x=0$ متقارن است یعنی احتمال وقوع خطای تصادفی با علامت‌های مثبت و منفی یکسان است.

$$p(x)=p(-x)$$

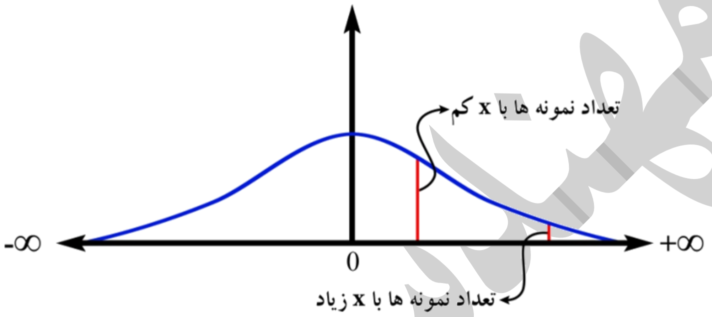


۳) ماکزیمم مقدار این تابع در $x=0$ رخ می‌دهد به عبارت دیگر می‌توان گفت که احتمال وقوع خطای تصادفی با اندازه کوچک نزدیک به صفر خیلی زیاد است.

[1] Gauss Density Function



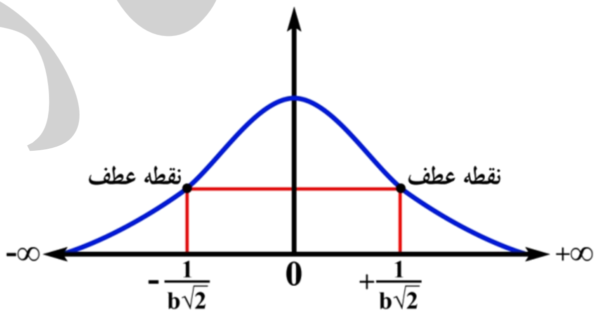
۴) با افزایش مقدار x مقدار تابع چگالی کم می‌شود. به عبارت دیگر احتمال وقـوع خطاهـای بـزرگ بسـیار کـم می‌باشد.



۵) نقاط عطف این تابع در $x=\pm\frac{1}{b\sqrt{2}}$ رخ می‌دهد.

(مشتق دوم تابع می‌شود نقاط عطف تابع)

$$f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}b}$$

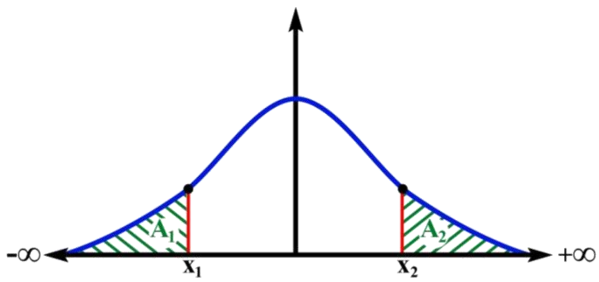


۶) خواص آماری تابع گوس

$$p(x \le x_1)=\int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = A_1$$

$$p(x \ge x_2)=\int_{x_2}^{+\infty} f(x)dx = 1-\int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx = A_2$$

$$p(x_1 \le x \le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



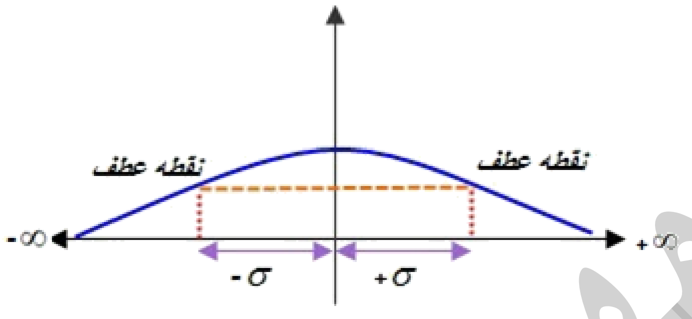
بررسی مقادیر خطاها

خطاهای مختلف در یک اندازه‌گیری عبارتند از:

۱) خطای مطلق ۲) خطای محتمل ۳) خطای ماکزیمم

۱) خطای مطلق[1]:

یک مقدار عددی است که با استفاده از معلومات قابل محاسبه می‌باشد و در روی منحنی توزیع خطا، این مقـدار طول نقطه عطف می‌باشد. (σ)



۲) خطای محتمل[2]:

این خطا نشان دهنده احتمال وجود مقادیر مطلق در محدوده معین $(\sigma$ تا $-\sigma)$ می‌باشد. و برای تعیـین آن کافی است سطح منحنی گوس در این محدوده محاسبه کنید.

$$p(-\sigma \le x \le \sigma) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} a e^{-b^2 x^2} dx = \frac{2}{3} = 0.683$$

۳) خطای ماکزیمم[3]:

این خطا نیز یک مقدار عددی است که بستگی به احتمال در محدوده‌های زیر دارد.

$p(-\sigma \le x \le \sigma) = 0.6827$

$p(-2\sigma \le x \le 2\sigma) = 0.9545$

$p(-3\sigma \le x \le 3\sigma) = 0.9973$

حال با توجه به احتمال‌های بدست آمده در محدوده‌های مختلف $(3\sigma, 2\sigma, \sigma)$ خطای مـاکزیمم برابـر اسـت بـا حاصل جمع این سه احتمال ضربدر خطای مطلق (σ)

$$\Rightarrow e_{max} = \pm(0.6827 + 0.9545 + 0.9973)\sigma = \pm 2.7\sigma$$

تابع توزیع نرمال[4] (N.D.F)

همان طور که می‌دانید در تابع گوس میانگین اندازه‌گیری‌هـا صـفر خواهـد شـد $(\mu = ۰)$ ولـی در نمونـه‌هـای مختلف این میانگین صفر نمی‌شود و چنانچه ما در تابع توزیع گوس به جای x از $x - \mu$ استفاده کنیم یک تابع عمومی‌تری خواهیم داشت که تمام خصوصیات تابع توزیع گوس را دارا می‌باشد که به آن تابع توزیع نرمال گفته

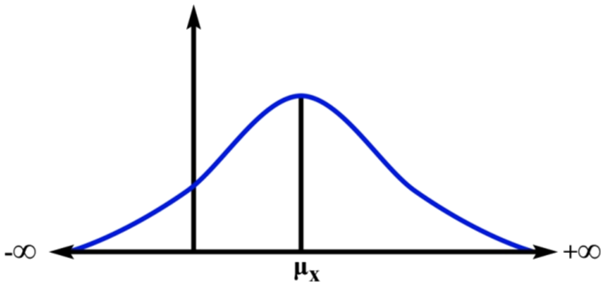
[1] Absolute Error
[2] Probable Error
[3] Maximum Error
[4] Normal Distribution Function

می‌شود. که این تابع دو پارامتر اساسی دارد. میانگین (μ) و واریانس (σ^2) و به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$X \sim N_{(\mu_x, \sigma_x^2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x}\right)^2}$$



مقدار این تابع از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد.

تابع توزیع نرمال استاندارد[1] (S.N.D.F)

تابع توزیع نرمال استاندارد (f(z)) تابعی است نرمال که تمامی خصوصیات تابع نرمال را داراست اما مزیتی که دارد این است که مقدار میانگین آن (μ_x) برابر صفر و واریانس آن برابر یک می‌باشد $(\sigma_x^2 = 1, \mu_x = 0)$ و به همین دلیل دارای جدول احتمال می‌باشد که برای هر مقداری احتمال آن مشخص شده. پس ما نرمال‌های دیگر را به این نرمال تبدیل می‌کنیم.

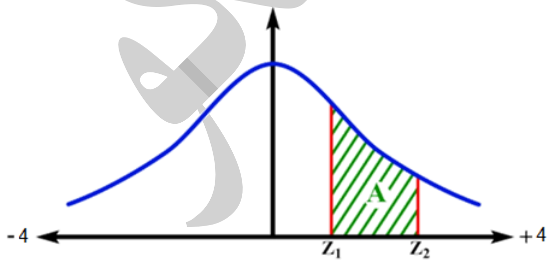
جهت این کار بجای $\frac{x-\mu_x}{\sigma}$ از z در تابع توزیع نرمال استفاده می‌کنیم و در واقع یک تغییر متغیر می‌دهیم

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma z + \mu$$

و به تابعی به فرم زیر می‌رسیم که دارای واریانس یک و میانگین صفر می‌باشد.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

اگر بخواهیم احتمال وقوع z را در بازه z_2, z_1 محاسبه کنیم یعنی مساحت زیر تابع f(z) را در بازه (z_2, z_1) بدست آوریم داریم:



$$A = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2} dz$$

از آنجایی که محاسبه این انتگرال مشکل است. مقادیر احتمال به ازاء z های مختلف در یک جدول آماری گردآوری شده و در زیر آمده و با یک مثال طرز استفاده از آن را یاد می‌گیریم.

[1] Standard Normal Distribution Function

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the Right of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

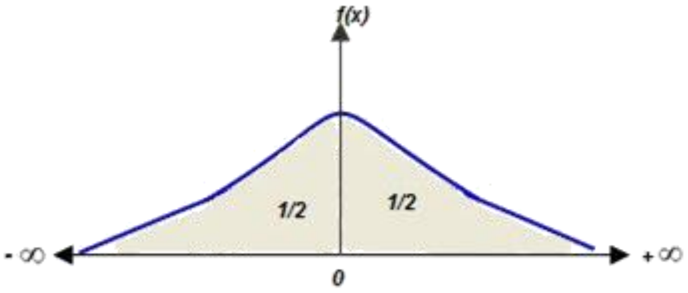
STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.										
Z	**.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

تابع توزیع نرمال استاندارد را به شکل زیر نشان می‌دهند.

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1$$

$$p(z \le 0) = p(z \ge 0) = \frac{1}{2}$$



مثال: مقدار $p(z \le 1.96)$ را بیابید.

$$p(z \le 1.96) = 0.975 \quad or \quad f(1.96) = 0.975$$

از درون جدول توزیع نرمال استاندارد مقدار احتمال را برای Z=1.96 استخراج می‌کنیم.

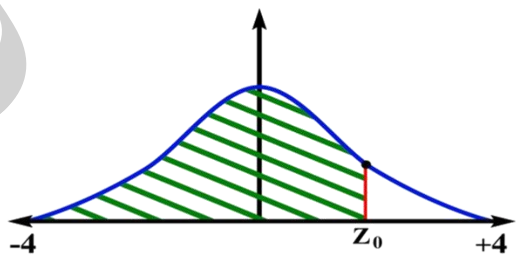
نکته:

۱) $p(z < z_{\circ})$

$$p(z < z_{\circ}) = 1 - p(z > z_{\circ})$$

مثال: مقدار $p(z < 2.18)$ را بیابید.

$$p(z < 2.18) = 1 - p(z > 2.18) = 0.98537$$

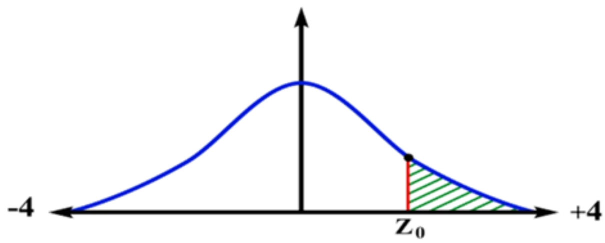


۲) $p(z > z_{\circ})$

$$p(z > z_{\circ}) = 1 - p(z < z_{\circ})$$

مثال: مقدار $p(z > 2.18)$ باشد را بیابید.

$$p(z > 2.18) = 1 - p(z < 2.18) = 1 - 0.98537 = 0.01463$$

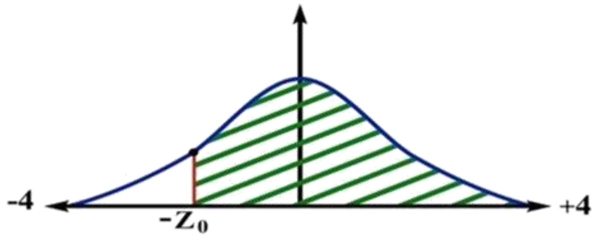


۳) $p(z > -z_{\circ})$

$$p(z > -z_{\circ}) = p(z < z_{\circ}) = 1 - p(z > z_{\circ})$$

مثال: مقدار $p(z > -2.18)$ باشد را بیابید.

$$P(z>-2.18)=p(z<2.18)=1-p(z>2.18)=0.98537$$

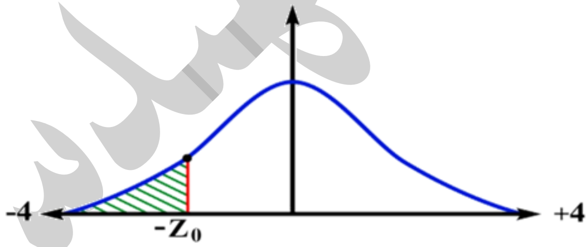


۴) $p(z<-z_\circ)$

$$p(z<-z_\circ)=p(z>z_\circ)=1-p(z<z_\circ)$$

مثال: مقدار $p(z<-2.18)$ باشد را بیابید.

$$p(z<-2.18)=p(z>2.18)=1-p(z<z_\circ)=1-0.98534=0.01463$$

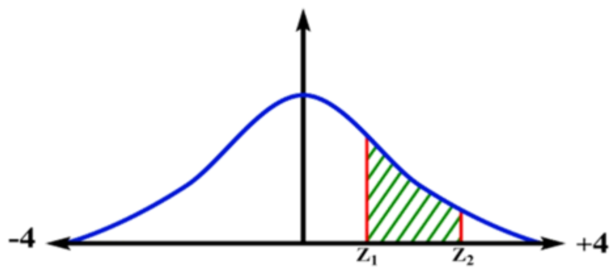


۵) $p(z_1<z<z_2)$

$$p(z_1<z<z_2)=p(z>z_1)-p(z>z_2)=p(z<z_2)-p(z<z_1)$$

مثال: مقدار $p(1.32<z<3.46)$ باشد را بیابید.

$$p(1.32<z<3.46)=p(z>1.32)-p(z>3.46)=$$
$$=p(z<-1.32)-p(z<-3.46)=0.09342-0.00027=0.09315$$

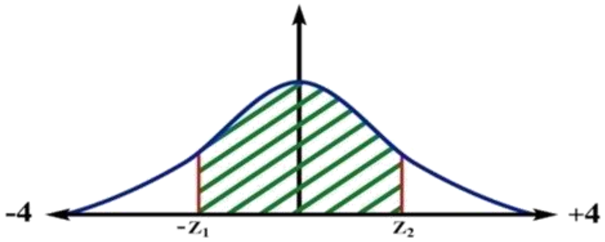


۶) $p(z<z_2)-p(z<-z_1)=p(-z_1<z<z_2)$

$$p(-z_1<z<z_2)=1-(p(z<-z_1)+p(z>z_2))=p(z>-z_1)-p(z>z_2)$$
$$=p(z<z_2)-p(z<-z_1)=1-p(z>z_2)-p(z<z_1)=p(z<z_2)-1-p(z<z_1)$$

مثال: مقدار $p(-1.5<z<1.6)$ باشد را بیابید.

$$p(-1.5<z<1.6)=p(z>-1.5)-p(z>1.6)=$$
$$p(z<1.5)-(1-p(z<1.6))=0.93319-(1-0.94520)=0.87839$$



۷) $p(-z_\circ < z < z_\circ)$

$$p(-z_\circ < z < z_\circ) = p(z > -z_\circ) - p(z > z_\circ) = p(z < z_\circ) - 1 + p(z < z_\circ) \Rightarrow$$
$$p(-z_\circ < z < z_\circ) = 2p(z < z_\circ) - 1 = 1 - 2p(z > z_\circ)$$

مثال: مقدار $p(-1 < z < 1)$ باشد را بیابید.

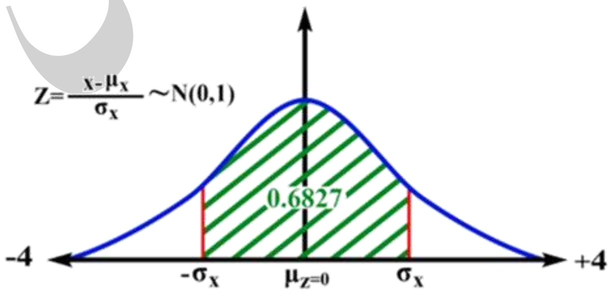
$$p(-1 < z < 1) = p(z < 1) - p(z < -1) = 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$$

یا

$$(-1 < z < 1) = 1 - 2p(z > 1) = 1 - (2 \times (1 - p(z < 1)) = 1 - (2 \times (1 - 0.84134)) = 0.68268$$

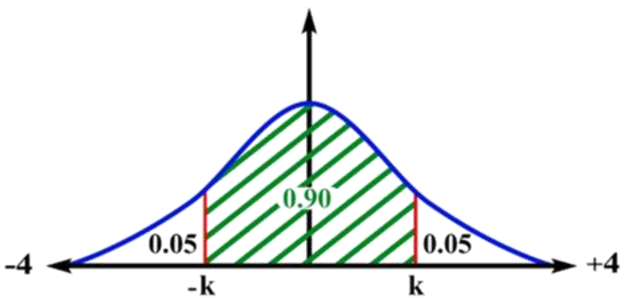
از طرفی:

$$p(-1 < z < 1) = p(-1 < \frac{x - \mu_x}{\sigma x} < 1) = p(-\sigma x < x - \mu_x < \sigma x) = 0.68268$$
$$\Rightarrow p(-1 \times \sigma_x < x - \mu_x < 1 \times \sigma_x) = 0.6827$$
$$\Rightarrow p(-2 \times \sigma_x < x - \mu_x < 2 \times \sigma_x) = 0.9545$$
$$\Rightarrow p(-3 \times \sigma_x < x - \mu_x < 3 \times \sigma_x) = 0.9973$$



حال می‌خواهیم انحراف از معیار از میانگین را (ضریب انحراف معیار (k)) برای احتمال 0.90 را بدست آوریم.

$$p(-k < z < k) = 0.90 = 1 - 2p(z > k) = 0.90$$
$$\Rightarrow -2p(z > k) = 0.90 - 1 \Rightarrow -p(z > k) = \frac{-0.1}{2} = -0.05$$
$$\Rightarrow p(z > k) = 0.05 \Rightarrow 1 - p(z < k) = 0.05 \Rightarrow -p(z < k) = -0.95 \Rightarrow p(z < k) = 0.95$$



در جدول به دنبال عددی می‌گردیم که احتمال آن برابر 0.95 باشد. در نتیجه:

$$p(z<k)=0.95 \Rightarrow \begin{matrix} k_1=1.65 \\ k_2=1.64 \end{matrix} \Rightarrow k=1.645$$

یعنی تا محدوده $\pm(k\times\sigma_x)$ احتمال اینکه مقدار واقعی در بین محدوده باشد %90 می‌باشد.

فاصله اطمینان [1]

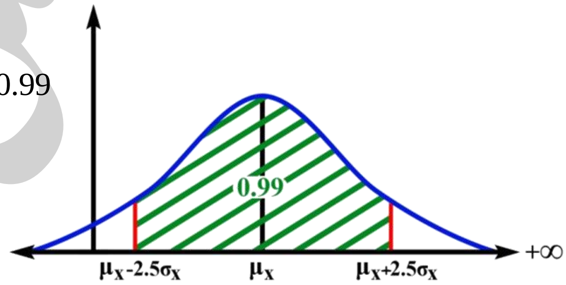
این کار را برای احتمال‌های 0.68, 0.90, 0.95, 0.99 نیز انجام می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$p(-\sigma_x < x-\mu_x < \sigma_x)=0.68$$
$$p(-1.645\times\sigma_x < x-\mu_x < 1.645\times\sigma_x)=0.90$$
$$p(-1.96\times\sigma_x < x-\mu_x < 1.96\times\sigma_x)=0.95$$
$$p(-2.575\times\sigma_x < x-\mu_x < 2.575\times\sigma_x)=0.99$$

در واقع اعداد بدست آمده k ضرایبی هستند که اگر ما آن‌ها را در مقدار انحراف معیار از میانگین (σ_x) ضرب کنیم عددی حاصل می‌شود که نشان دهنده فاصله مقادیر از میانگین خواهد بود برای احتمالات مختلف مثلاً با احتمال %99 $(k=2.57)$ مقدار واقعی در این بازه قرار دارد.

محدوده اطمینان %99 را خطای ماکزیمم نیز می‌گویند. مثلاً در ترازیابی داریم:

$$e_{max}=2.5\sigma_n\sqrt{L} \quad , \quad p(-k\sigma_x < x-\mu_x < k\sigma_x)=0.99$$
$$\Rightarrow k=2.57\approx 2.5 \Rightarrow p(\mu_x-2.5\sigma_x < x < \mu_x+2.5\sigma_x)=0.99$$



مثال: یک توزیع نرمال با حد متوسط 100 و انحراف معیار 10 داده شده است. مطلوب است محاسبه t_i که در رابطه $p(|x-100|\geq t_i)=0.5$ صدق می‌کند، موقعیت این احتمال را نیز نشان دهید.

$$p(|x-100|\geq t_i)=0.5=p(\pm(x-100)\geq t_i)=0.5=p(t_i\leq x-100\leq -t_i)=0.5$$

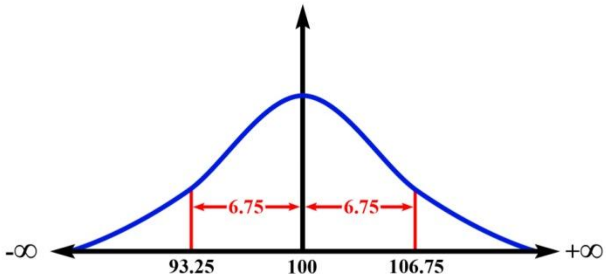
$$\Rightarrow p(100+t_i\leq x\leq 100-t_i)=0.5 \qquad , \qquad z=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}=\frac{x-100}{10}$$

$$p(\frac{100+t_i-100}{10}\leq z\leq \frac{100-t_i-100}{10})=0.5 \Rightarrow P(\frac{t_i}{10}\leq z\leq \frac{-t_i}{10})=0.5$$

$$\Rightarrow p(z\leq\frac{-t_i}{10})-p(z\leq\frac{t_i}{10})=0.5 \Rightarrow 1-p(z\leq\frac{t_i}{10})-p(z\leq\frac{t_i}{10})=0.5$$

$$\Rightarrow 1-2p(z\leq\frac{t_i}{10})=-0.5 \Rightarrow 2p(z\leq\frac{t_i}{10})=1.5 \Rightarrow p(z\leq\frac{t_i}{10})=0.75 \Rightarrow \frac{t_i}{10}=0.675 \Rightarrow t_i=6.75$$

[1] Confidence Interval



نمونه برداری[1]، برآورد[2] و فواصل اطمینان[3]

هر مجموعه به حجم n که از یک جامعه آماری انتخاب کنیم یک نمونه به حجم n خوانده می‌شود. علت نمونه برداری این است که ما به کل جامعه دسترسی نداریم. در نقشه برداری نیز مشاهدات ما نوعی نمونه برداری هستند. در این حالت نمونه‌ها تابع توزیع نرمال است. (اگر تنها خطای اتفاقی داشته باشیم) نمونه برداری جهت مشخص کردن پارامترهای جامعه به کار می‌رود.

برآورد:

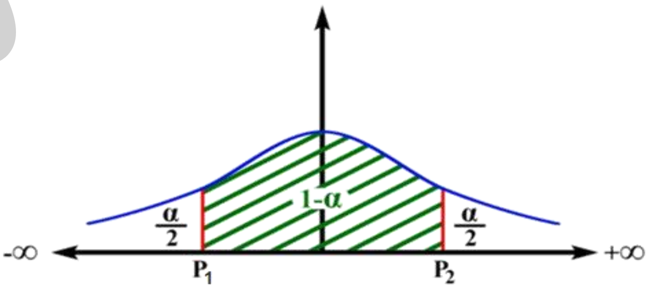
برآورد به صورت نقطه‌ای و فاصله‌ای انجام می‌گیرد. در برآورد نقطه‌ای برای هر پارامتر مجهول یک عدد برآورد می‌کنیم.

اما در برآورد فاصله‌ای بدلیل اینکه رسیدن به مقدار واقعی یک کمیت امکان پذیر نیست پس بایستی وقوع آن را در یک فاصله بیان کرد. یا به عبارتی به دلیل اینکه نمونه‌ها به صورت پیوسته هستند و مقادیر آن‌ها محدود نیست ما مجبور هستیم برای بیان برآوردی از مقدار واقعی آن را در یک بازه بیان کنیم (فاصله اطمینان).

$$p(p_1 < x < p_2) = 1-\alpha \begin{cases} 0.90 \\ 0.95 \\ 0.99 \end{cases}$$

$1-\alpha$: سطح اطمینان

α : سطح اعتبار



برای برآورد فاصله‌ای، از فواصل اطمینان استفاده می‌کنیم.

فاصله اطمینان برای میانگین:

فرض کنید یک توزیع نرمال با متغیر تصادفی x با میانگین μ و واریانس σ^2 وجود دارد. (μ مجهول - σ^2 معلوم). $\bar{x}$ برآوردی از μ می‌باشد که از یک نمونه با سایز n برآورد شده است (برآورد نقطه‌ای)

$$x_1, x_2, \ldots x_n \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

---
[1] Sampling
[2] Estimate
[3] Confidence Distance

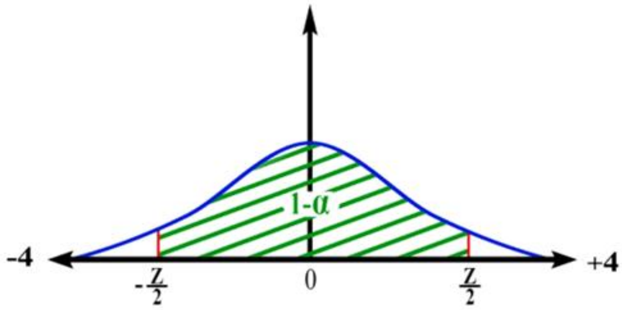
$$\Rightarrow x_i \sim N(\mu,\sigma^2) \xrightarrow{\text{طبق قضیه حد مرزی}} \bar{x} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \quad , \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

حال باید متغیر نرمال $\bar{x}$ را استاندارد کنیم:

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_x^{\ 2}}{n}}} = \frac{\bar{x}-\mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow p(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow p(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$



σ: دقت دستگاه مشاهده

n: تعداد مشاهدات

مثال: فرض کنید یک طول را 10 بار اندازه‌گیری کرده‌ایم و $\sigma^2 = 0.01^{m^2}$ باشد فاصله اطمینان μ را برای $\alpha = 0.05$ محاسبه کنید اگر $\bar{x} = 20.20^m$ باشد.

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

$$n = 10 \quad , \quad \sigma^2 = 0.01 \Rightarrow \sigma = 0.1$$

$$p(20.20 - 1.96 \times \frac{0.1}{\sqrt{10}} < \mu < 20.20 + 1.96 \times \frac{0.1}{\sqrt{10}}) = 0.95$$

$$\Rightarrow p(20.138 < \mu < 20.262) = 0.95$$

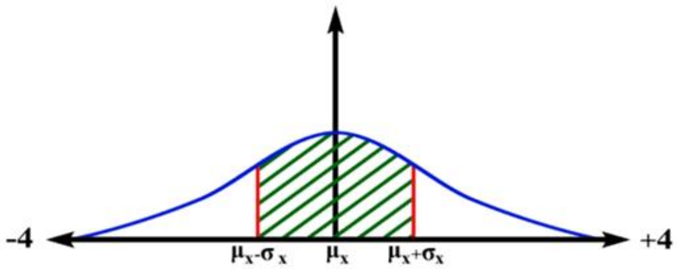
پس فاصله اطمینان 95% بازه (20.138_20.262)خواهد بود.

تمرین: طول x با میانگین نمونه 170.06^m و واریانس جامعه 3^{cm^2} در 10 نوبت اندازه‌گیری شده است. فاصله اطمینان μ_x را در سطوح 0.99,0.95,0.90 بدست آورید و بر روی شکل نشان دهید.

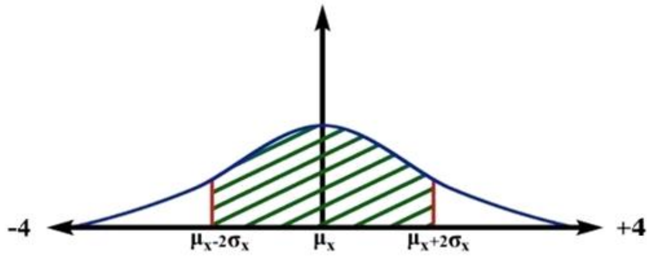
تست 3σ

از این تست جهت یافتن مقادیر اشتباه در مشاهدات استفاده می‌شود. این تست فاصله اطمینان ماکسیمم را به ما می‌دهد و هر مشاهده‌ای خارج از این فاصله قرار گیرد جز مشاهدات اشتباه می‌باشد.

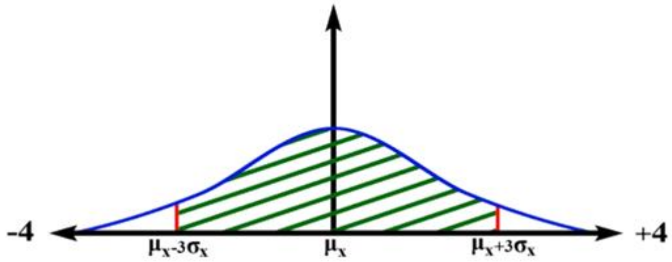
$$p(-1\times\sigma_x < x-\mu_x < 1\times\sigma_x) = p(\mu_x - \sigma_x < x < \mu_x + \sigma_x) = 0.67827$$



$$p(-2\times\sigma_x < x-\mu_x < 2\times\sigma_x) = p(\mu_x - 2\sigma_x < x < \mu_x + 2\sigma_x) = 0.9545$$



$$p(-3\times\sigma_x < x-\mu_x < 3\sigma_x) = p(\mu_x - 3\sigma_x < x < \mu_x + 3\sigma_x) = 0.9973$$



مثال: زاویه α را ۲۴ بار اندازه‌گیری کرده‌ایم نتایج بدست آمده به صورت زیر می‌باشد. مطلوب است محتمل‌ترین مقدار و انحراف معیار آن (در صورت وجود اشتباه آن را حذف کنید).

شماره	زاویه	شماره	زاویه	شماره	زاویه	شماره	زاویه
1	41.9	7	47.2	13	46.1	19	42.6
2	49.5	8	43.2	14	43.2	20	41.3
3	49.3	9	47.5	15	42	21	45.7
4	42.6	10	44.3	16	50.3	22	44.8
5	45.5	11	46.2	17	52.0	23	48.1
6	46.6	12	43.1	18	44.1	24	42.9

انحراف معیار هر نمونه $(S_\circ)$

انحراف معیار کل یا همان انحراف معیار میانگین برابر S خواهد بود و انحراف معیار هر نمونه برابر با $\frac{S}{\sqrt{n}}$ خواهد بود.

$$S=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^{\ 2}}{n-1}}\Rightarrow S_{\circ}=\frac{S}{\sqrt{n}}\Rightarrow S_{\circ}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^{\ 2}}{n(n-1)}}$$

واریانس نمونه‌های وزن دار:

چنانچه کمیتی n بار و هر بار p_i بار اندازه‌گیری شده باشد، در این صورت هر بار اندازه‌گیری کمیت دارای واریانس خاصی خواهد بود. اگر واریانس کل کمیت را با S^2 و واریانس هر سروی که P بار اندازه‌گیری کرده باشیم را با $S_{\circ}^2(i)$ نشان دهیم داریم:

$$S_{\circ}^2(1)=\frac{S^2}{p_1}\Rightarrow S^2=p_1\ S_{\circ}^2(1)\ ,\ S_{\circ}^2(2)=\frac{S^2}{P_2}\Rightarrow S^2=P_2S_{\circ}^2(2)\ ,....,S_{\circ}^2(n)=\frac{S^2}{p_n}\Rightarrow S^2=p_nS_{\circ}^2(n)$$

$$(1)\Rightarrow p_1\ S_{\circ}^2(1)=P_2\ S_{\circ}^2(2)=...=p_nS_{\circ}^2(n)$$

$$(2)\Rightarrow p_1=\frac{S^2}{S_{\circ}^2(1)}=P_2=\frac{S^2}{S_{\circ}^2(2)},...,=p_n=\frac{S^2}{S_{\circ}^2(n)}$$

$$\bar{x}=\frac{x_1p_1+x_2P_2+....+x_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}=\frac{x_1\frac{S^2}{S_{\circ}^2(1)}+x_2\frac{S^2}{S_{\circ}^2(2)}+...+x_n\frac{S^2}{S_{\circ}^2(n)}}{\frac{S^2}{S_{\circ}^2(1)}+\frac{S^2}{S_{\circ}^2(2)}+...+\frac{S^2}{S_{\circ}^2(n)}}\Rightarrow$$

$$(3)\Rightarrow\bar{x}=\frac{x_1\frac{1}{S_{\circ}^2(1)}+x_2\frac{1}{S_{\circ}^2(2)}+...+x_n\frac{1}{S_{\circ}^2(n)}}{\frac{1}{S_{\circ}^2(1)}+\frac{1}{S_{\circ}^2(2)}+...+\frac{1}{S_{\circ}^2(n)}}$$

وزن هر مشاهده : $\frac{1}{S_{\circ}^2(i)}$

$$nS^2=p_1S_{\circ}^2(1)+p_2S_{\circ}^2(2)+...+P_nS_{\circ}^2(n)=\sum_{i=1}^{n}p_iS_{\circ}^2(i)$$

$$n=p_1+p_2+...+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$$

$$(4)\Rightarrow S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\ S_{\circ}^2(i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i}$$

$$\Rightarrow S_{\circ}^2(i)=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}\Rightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iv_i^2}{\sum_{i=1}^{n}pi}\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iv_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}p_i}}$$

$$,S_{\circ}=\frac{S}{\sqrt{n}}\Rightarrow S_{\circ}^2=\frac{S^2}{n}\Rightarrow S_{\circ}^2=\frac{1}{n(n-1)}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iv_i^2}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\Rightarrow S_{\circ}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iv_i^2}{n(n-1)\sum_{i=1}^{n}p_i}}$$

$S_{\circ}$: انحراف معیار هر نمونه

S: انحراف معیار نمونه‌ها

مثال: زاویه α را توسط یک زاویه یاب به صورت زیر در ۲۰ کوپل اندازه‌گیری کرده‌ایم. مطلوب است پاسخ پرسش‌های زیر:

الف) رسم هیستوگرام و پلیگون مربوط به مشاهدات

ب) ترسیم تابع احتمال این نمونه با در نظر گرفتن مقادیر ε_i

ج) محاسبه المان‌های تابع نرمال استاندارد.

د) کنترل صحت محاسبات در هر مرحله

هـ) محتمل‌ترین مقدار را با استفاده از فرمول‌های ساده بدست آورید.

و) محاسبه دقت نسبی هر اندازه

ز) محاسبه فواصل اطمینان برای احتمال‌های 0.99, 0.95,0.68

الف)

n	α_i	n	α_i
1	75° 13' 11.06"	11	75° 13' 12.02"
2	10.82”	12	10.57”
3	11.48”	13	11.55”
4	11.36”	14	11.60”
5	10.88”	15	11.25”
6	12.13”	16	11.31”
7	11.40”	17	10.99”
8	11.41”	18	10.58”
9	10.38”	19	11.24”
10	11.50”	20	12.03”

$n=20 \quad k=5 \quad R=12.13-10.38=1.75$

$d=\frac{R}{K}=.35$

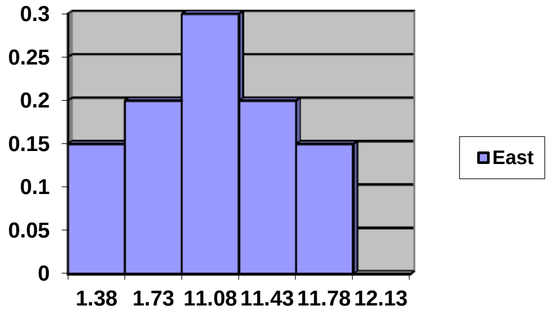
$n_1=[10.38,10.73]=3\rightarrow\tilde{n}_1=\frac{3}{20}=0.15$

$n_2=(10.73,11.08]=4\rightarrow\tilde{n}_2=\frac{4}{20}=0.20$

$n_3=(11.08,11.43]=6\rightarrow\tilde{n}_3=\frac{6}{20}=0.30$

$n_4=(11.43,11.78]=4\rightarrow\tilde{n}_4=\frac{4}{20}=0.20$

$n_5=(11.78,12.13]=3\rightarrow\tilde{n}_5=\frac{3}{20}=0.15$



$$\bar{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=75°13'11.278''$$

$$\alpha'=\alpha_{\circ}+\frac{\sum(\alpha_i-\alpha_{\circ})}{n}=75°13'11.278''$$

$$\varepsilon_i=\alpha_i-\bar{\alpha}=(-0.218''-0.458''\ \ 0.202''\ \ 0.082''-0.398''\ 0.852''\ 0.122''\ 0.132''$$
$$-0.898''\ \ 0.222''\ \ 0.742''\ \ -0.708''\ \ 0.272''\ \ 0.322''\ \ -0.028''\ \ 0.032''\ \ -0.288''$$
$$-0.698''\ \ -0.038''\ \ 0.752'')$$

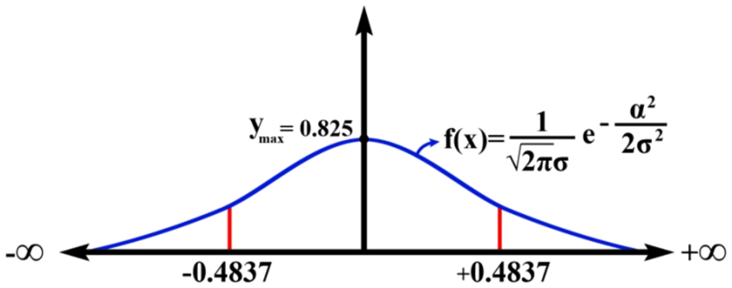
$$if\ \ \alpha_{\circ}=75°\ 13'\ 10''\Rightarrow(\alpha_i-\alpha_{\circ})=e=(1.06''\ \ 0.82''\ \ 1.48''\ \ 1.36''\ \ 0.88''$$
$$2.13''\ \ 1.04''\ \ 1.41''\ \ 0.38''\ \ 1.50''\ \ 2.02''\ \ 0.57''\ \ 1.55''\ \ 1.60''\ \ 1.25''\ \ 1.31''$$
$$0.99''\ \ 0.58''\ \ 1.24''\ \ 2.03'')\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}e=25.56\ ,\left(\sum_{i=1}^{n}e\right)^2=653.3136$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha-\alpha_{\circ})^2=\sum_{i=1}^{n}e^2=37.1112\quad ,\quad n\times\sum_{i=1}^{n}e^2=742.224$$

$$S=\pm\sqrt{\frac{n\sum e^2-\left(\sum_{i=1}^{n}e\right)^2}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{742.224-653.3136}{20\times19}}=0.483709''$$

$$S_{\max}=\frac{8}{3}\times S=2.666\times0.483709=1.289892$$

ب) تابع توزیع گوس [1] (تابع احتمال)



[1] Gauss Distribution Function

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.4837} = 0.82476$$

ج) محاسبه المان‌های تابع توزیع نرمال استاندارد:

$$t_i = \frac{\alpha_i - \mu}{s} \Rightarrow t_i = \frac{75°\ 13'\ 11.06'' - 75°\ 13'\ 11.278''}{0.4837} = 0.451$$

$$\Rightarrow t_i = (-0.451\ \ -0.947\ \ 0.418\ \ 0.170\ \ -0.823\ \ 1.761\ \ 0.252\ \ 0.273$$
$$-1.857\ \ 0.459\ \ 1.534\ \ -1.464\ \ 0.562\ \ 0.666\ \ -0.0579\ \ 0.066\ \ -0.595\ \ -1.443$$
$$-0.0789\ \ 1.5547)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_\alpha} e^{\frac{-(\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{2S_\alpha{}^2}} \quad , \quad t = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

د) کنترل صحت محاسبات:

الف)

$$\sum \varepsilon_i = 0 \xrightarrow{\text{محاسبات}} \sum \varepsilon_i = 0$$

ب) انحراف معیار باید با انحراف معیار اولیه برابر باشد.

کنترل صحت محاسبات نرمال استاندارد:

$$\sum t_i = 0 \xrightarrow{\text{محاسبات}} \sum t_i = 0.0008° \approx 0$$

اگر در محاسبات ارقام را تا رقم آخر در نظر بگیریم صفر خواهد شد

$$\sum S_{ti} = 1 \xrightarrow{\text{محاسبات}} \sum S_{ti} = 0.9998 \approx 1$$

اگر در محاسبات ارقام را تا رقم آخر در نظر بگیریم یک خواهد شد

ه) محاسبه مقدار محتمل زاویه:

خطای محتمل میانگین

$$S_{e.\bar{\alpha}} = \frac{0.4873}{\sqrt{20}} = 0.109'' \rightarrow E\bar{\alpha} = \frac{2}{3} \times 0.109 = 0.07211''$$

خطای محتمل هر زاویه

$$S_{e.\alpha} = 0.4873'' \rightarrow E\alpha = \frac{2}{3} \times 0.4873 = 0.3225''$$

و) محاسبه دقت نسبی:

دقت برای هر اندازه:

$$r_e = \frac{E\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = \frac{0.07211''}{75°13'11.278''} = 9.59 \times 10^{-4}{}''$$

دقت برای کل اندازه‌گیری‌ها

$$r_e = \frac{E\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{0.3225''}{75°13'11.278''} = 1.287 \times 10^{-3}{}''$$

ز) محاسبه فواصل اطمینان:

الف) فاصله اطمینان 68%

$$p(\mu_\alpha - \sigma_\alpha \le \alpha \le \mu_\alpha + \sigma_\alpha) = 0.68$$
$$\Rightarrow p(75^\circ\ 13'\ \ 11.278'' - 0.07211'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ 11.278'' + 0.07211'') = 0.68$$
$$\Rightarrow 75^\circ\ 13'\ \ 11.205'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ \ 11.35''$$

ب) فاصله اطمینان 95%

$$p(\mu_\alpha - 1.96\sigma_\alpha \le \alpha \le \mu_\alpha + 1.96\sigma_\alpha) = 0.95$$
$$p(75^\circ\ 13'\ 11.278'' - 1.96 \times 0.07211'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ 11.278'' + 1.96 \times 0.07211'') = 0.95$$
$$\Rightarrow 75^\circ\ 13'\ 11.136'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ \ \ 11.42''$$

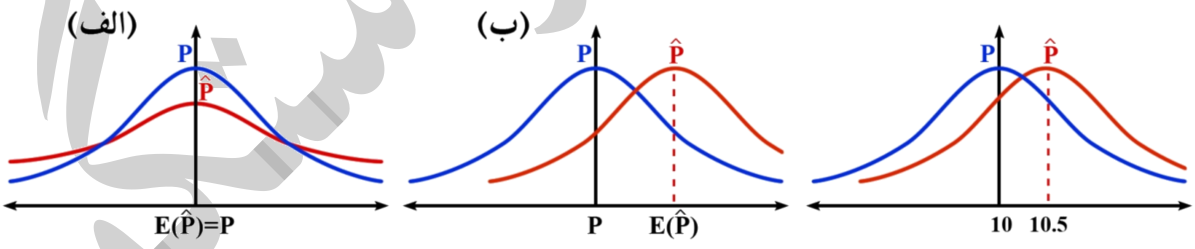
ج) فاصله اطمینان 99%

$$p(\mu_\alpha - 2.575\sigma_\alpha \le \alpha \le \mu_\alpha + 2.575\sigma_\alpha) = 0.99$$
$$p(75^\circ\ 13'\ 11.278'' - 2.275 \times 0.07211'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ 11.278'' + 2.575 \times 0.07211'') = 0.99$$
$$\Rightarrow 75^\circ\ 13'\ 11.091'' \le \alpha \le 75^\circ\ 13'\ \ \ 11.465''$$

خواص برآوردهای نقطه‌ای

۱- اریب[1] و نا اریب[2] بودن

فرض کنید $\hat{p}$ (پی کپ) برآوردی از p باشد (به عنوان مثال $\bar{x}$ برآوردی از μ_x است). $\hat{p}$ را یک برآورد نا اریب از p گوییم (شکل الف) هرگاه $E(\hat{p}) = p$ باشد، اگر $E(\hat{p}) = p$ نباشد $\hat{p}$ را یک برآورد اریب (biased) گوییم (شکل ب) و مقدار اریب بودن آن برابر است با $\text{biased} = E(\hat{p}) - p$



unbiased نا اُریب — biased اُریب — برای یک طول دارای خطای سیستماتیک می باشد که باعث شیفت ۰/۵ در طول شده

نکته: در مشاهدات نقشه برداری، خطای سیستماتیک باعث اریب شدن مشاهدات می‌گردد و همواره در یک جهت جابجایی پیدا می‌کند. پس چنانچه خطای سیستماتیک حذف شده باشد آنگاه $E(\hat{p}) = p$ یک برآورد نا اریب خواهد بود.

[1] Biased
[2] Unbiased

۲- کارآیی یا مینیمم واریانس:

از بین دو برآورد نا اریب آن برآوردی کاراتر است که واریانس کمتری دارد. (واریانس کمتر یعنی دقت بالاتر) چون میزان پراکندگی آن کمتر است.

۳- دقت و صحت[1]:

دقت بیانگر نزدیکی مشاهدات به یکدیگر است. دقت را با انحراف معیار (σ) یا انحراف استاندارد $(S.D)$ نشان می‌دهیم.

دقت تنها شامل خطای اتفاقی می‌شود.

$$\sigma^2{}_{\hat{p}} = \operatorname{var}(\hat{p}) = E[(\hat{p}-E(\hat{p}))^2] = E(\hat{p}^2)-(E(\hat{p}))^2$$

صحت عبارتست از نزدیکی مشاهدات به مقدار واقعی کمیت مورد نظر. صحت شامل هر دو نوع خطای اتفاقی و سیستماتیک است. صحت را با خطای مربعی متوسط یا MSE[2] بیان می‌کنیم.

$$M^2{}_{\hat{p}} = MSE(\hat{p}) = E[(\hat{p}-p)^2] = E[\hat{p}^2 - 2p\hat{p} + p^2]$$

$$E(\hat{p}^2) - 2PE(\hat{p}) + P^2 + (E(\hat{p}))^2 - (E(\hat{p}))^2 = E(\hat{p}^2) - (E(\hat{p}))^2 + (E(\hat{p}))^2 - 2PE(\hat{p}) + P^2$$

$$\Rightarrow MSE(\hat{p}) = \sigma^2{}_{\hat{p}} + (E(\hat{p}) - P)^2 \Rightarrow M^2_{\hat{p}} = \sigma^2{}_{\hat{p}} + (\text{biased})$$

صحت = دقت (خطای اتفاقی) + خطای سیستماتیک

تابع خطی: به توابعی گفته می‌شود که اگر از این تابع نسبت بـه متغیرهـای آن مشـتق مرتبـه اول بگیـریم در معادله حاصل (f')، دیگر اثری از متغیری که نسبت به آن مشتق گرفتیم باقی نماند. حـال اگـر متغیـر بـاقی مانده، به این نوع تابع، تابع غیر خطی گویند.

ماتریس واریانس – کواریانس مشاهدات $(\sum_{LL})$:

ما مشاهدات را با L و مجهولات را باX نشان می‌دهیم. و از آنجایی که در نقشه برداری فرض بـر ایـن اسـت کـه مشاهدات مستقل از هم هستند. پس کواریانس بین مشـاهدات صـفر خواهـد بـود یعنـی مـاتریس $\sum_{LL}$ یـک ماتریس قطری خواهد بود که درایه‌های قطر اصلی آن برابر واریانس مشاهدات (σ_{Li}) می‌باشد.

$$\sum{}_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{L_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{L_n} \end{bmatrix}$$

مثال: چنانچه مشاهده طول و زاویه‌ای بـا انحـراف معیارهـای $\sigma_L = 0.02^m$ و $\sigma_\alpha = 5''$ بـرای دسـت یـابی بـه مختصات نقطه مجهولی (M) انجام شده باشد. مطلوب است ماتریس واریانس کواریانس مشاهدات.

نکته: زمانی که مشاهدات ما از دو جنس هستند (طولی و زاویه‌ای) برای بکارگیری هر دو در محاسبات باید هـر

[1] Precision And Accuracy
[2] Mean Square Error

دو از یک جنس شوند (زاویه بر حسب رادیان شود).

در واحد متریک $\sigma_\alpha = \frac{5}{206265}$

$$\Rightarrow \sum_{LL} = \begin{bmatrix} 0.0004 & 0 \\ 0 & (\frac{5}{206265})^2 \end{bmatrix}$$

قانون انتشار میانگین:

اگر y,x دو متغیر تصادفی باشند و $E(x)=\mu_x$ و y یک تابع خطی از x باشد $(y=ax+b)$ آنگاه E(y) بر اساس ویژگیهای اپراتور امید (E) به صورت زیر می‌باشد.

$$E(y)=E(ax+b)=aE(x)+b=a\mu_x+b \Rightarrow \mu_y = a\mu_x + b$$

در صورتی که یک بردار x شامل n متغیر تصادفی داشته باشیم یعنی $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بردار میانگین این n متغیر تصادفی به صورت زیر می‌باشد.

$$E(x)=\mu_x = \begin{bmatrix} \mu_{x1} \\ \mu_{x2} \\ \vdots \\ \mu_{xn} \end{bmatrix}$$

که μ_{xi} امید یا میانگین متغیر تصادفی x_i می‌باشد.

و اگر $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ یک بردار تصادفی شامل u متغیر تصادفی باشد و y_iها تابعی از x_iها باشند به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_u = a_{u1}x_1 + a_{u2}x_2 + \dots + a_{un}x_n + b_u \end{cases}$$

معادلات فوق را به صورت ماتریس می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_u \end{bmatrix}_{u\times1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & :::: & \vdots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{un} \end{bmatrix}_{u\times n} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times1} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_u \end{bmatrix}_{u\times1}$$

$$\Rightarrow y = Ax + B$$

$$y_{u\times1} = A_{u\times n} \times x_{n\times1} + B_{u\times1}$$

بنابراین E(y) برابر خواهد بود با:

$$E(y)=E[Ax+B]=AE(x)+B \Rightarrow \mu_{y_{u\times1}}=A_{u\times n}\ \mu_{x_{u\times1}}+B_{u\times1}$$

مثال: اگر y_1 و y_2 دو متغیر تصادفی باشند که به صورت زیر تابعی خطی از x_2, x_1 باشند و $E(x_2)=\mu_{x2}=3, E(x_1)=\mu_{x1}=2$ باشند. آنگاه μ_{y2}, μ_{y1} را بدست آورید.

$$y_1=2x_1-\frac{1}{3}x_2+3 \quad , \quad y_2=3x_1-4x_2+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

قانون انتشار خطا :

همان طور که می‌دانید مجهولات (x) از روی معلوماتی (مشاهدات (L)) بدست می‌آید پس زمانی که ما می‌خواهیم به مقدار خطای مجهولات برسیم یا آن‌ها را بررسی کنیم باید به سراغ خطای مشاهدات برویم و نحوه گسترش یا همان انتشار آن‌ها بر روی مجهولات برآورد شده پرداخت که نحوه انتشار خطای مشاهدات بر روی مجهولات را قانون انتشار خطا می‌نامند.

یا به زبان ساده، انتشار خطا یعنی اگر یک زاویه و یک طول را خواندیم و x,y را بدست آوردیم آنگاه مقدار دقت برای دستگاه مشخص است، مقدار دقت را برای مختصات بدست آوریم. (از دقت مشاهدات $(\sum_{LL})$ به دقت مجهولات $(\sum_{xx})$ برسیم)

مثال: فرض کنید مختصات نقطه A معلوم است $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و مشاهدات L_{AB}, G_{AB} جهت دست یابی به مختصات مجهول نقطه B انجام شده داریم:

$$L=\begin{bmatrix} L_{AB} \\ G_{AB} \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_B = x_A + L_{AB}\times \mathrm{Sin}(G_{AB}) \\ y_B = y_A + L_{AB}\times \cos(G_{AB}) \end{cases} \Rightarrow \sum_{LL_{n\times n}} \rightarrow \sum_{xx_{u\times u}}$$

۱) انتشار خطاها در توابع خطی

چنانچه مجهولات (y_2, y_1) دارای تابع خطی به فرم زیر باشند. مطلوب است ماتریس واریانس-کواریانس مجهولات $(\sum_{xx})$.

$$y_1=a_\circ+a_1x_1+a_2x_2$$
$$y_2=b_\circ+b_1x_1+b_2x_2$$

$$\Rightarrow \text{مشاهدات} = \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ و } \text{مجهولات} = \vec{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{xx}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2}\\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2\end{bmatrix} \qquad \sum_{yy}=\begin{bmatrix}\sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2}\\ \sigma_{y_2y_1} & \sigma_{y_2}^2\end{bmatrix}$$

حال می‌توان نوشت

$$\sum_{yy}=A\sum_{xx}A^T$$

و می‌توان اثبات کرد که:

$$\sigma_{y1}^2=a_1^2\sigma_{x1}^2+a_2^2\sigma_{x2}^2+2a_1a_2\sigma_{x1x2}$$
$$\sigma_{y2}^2=b_1^2\sigma_{x1}^2+b_2^2\sigma_{x2}^2+2b_1b_2\sigma_{x1x2}$$
$$\sigma_{y1y2}=\sigma_{y2y1}=a_1b_1\sigma_{x1}{}^2+a_2b_2\sigma_{x2}^2+(a_1b_1+a_2b_2)\sigma_{x1x2}$$

۲) انتشار خطا در توابع غیر خطی:

زمانی که تابع غیر خطی باشد باید آن را خطی نمود و سپس از روابط قانون انتشار خطا در حالت خطی استفاده نمود.

$$y=f(x)\rightarrow y=Ax\rightarrow \sum_{yy}=A\sum_{xx}A^T$$

A : ماتریس A را ماتریس ضرایب یا همان ماتریس ژاکوبین نیز می‌گویند که در آیه‌های آن حاصل مشتق از تابع نسبت به هر یک از مشاهدات می‌باشد و ابعاد آن $u\times n$ می‌باشد.

u : تعداد سطرها= تعداد مجهولات

n : تعداد ستونها= تعداد مشاهدات

∂: روند = مشتق

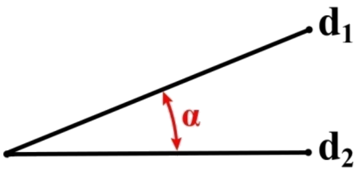
$$A=\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial y_u}{\partial x_1} & \frac{\partial y_u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_u}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

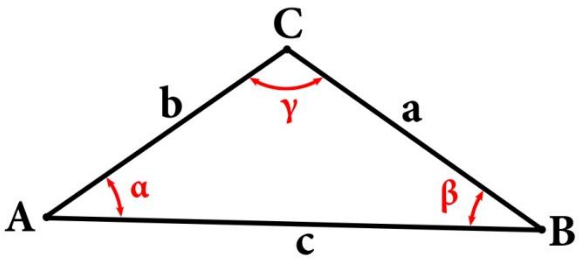
مثال: برای مثال قبل داریم:

$$\begin{cases}x_B=x_A+L\sin G\\ y_B=y_A+L\cos G\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}L\\G\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}\sum_{LL}=\begin{bmatrix}\sigma_L^2 & 0\\ 0 & \sigma_G^2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\sin G & L\cos G\\ \cos G & -L\sin G\end{bmatrix}$$

$$\sum_{XX}=\begin{bmatrix}\sin G & L\cos G\\ \cos G & -L\sin G\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sigma_L^2 & 0\\ 0 & \sigma_G^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sin G & \cos G\\ L\cos G & -L\sin G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_B}^2 & \sigma_{x_By_B}\\ \sigma_{y_Bx_B} & \sigma_{y_B}^2\end{bmatrix}$$

مثال: در شکل مقابل، زوایای γ,β,α اندازه‌گیری شده‌اند. اگر دقت اندازه‌گیری هر یک از امتدادها مقدار برابر S_d باشد مطلوب است تعیین دقت مجموع زوایا؟





$$\alpha = d_2 - d_1 \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_\alpha^2 = A\sum\nolimits_{dd} A^T = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_d{}^2 & 0\\ 0 & S_d{}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-S_d{}^2 & S_d{}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = S_d{}^2 + S_d{}^2 = 2S_d{}^2 \Rightarrow \sigma_\alpha = \sqrt{2}S_d$$

نکته: اگر مجهول فقط یک تابع داشته باشد (یک مجهول داشته باشیم) در این صورت می‌توان از رابطه مستقیم قانون انتشار خطا استفاده نمود.

$$x = f(a,b,c)$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2$$

پس برای مثال قبل هم خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \alpha = d_2 - d_1$$

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial d_1}\right)^2 \sigma_{d_1}^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial d_2}\right)^2 \sigma_{d_2}^2 \Rightarrow \sigma_\alpha^2 = 1\times\sigma_{d_1}^2 + 1\times\sigma_{d_2}^2 \Rightarrow \sigma_\alpha = \sqrt{\sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2} = \sqrt{2}\sigma_d = \sqrt{2}S_d$$

چون دقت تمام امتدادها با هم برابر است پس داریم:

$$\sigma\alpha = \sigma\beta = \sigma\gamma = \sqrt{2}S_d$$

نکته: در این مثال که مشاهدات ما از یک جنس است (زاویه) خروجی نیز از همان جنس خواهد بود و نیازی به تغییر واحد به رادیان نیست.

حال دقت مجموع زوایا را تعیین می‌کنیم. اگر این مجموع را با f نشان دهیم داریم:

$$f = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow f = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} \Rightarrow \sum\nolimits_{ff} = A\sum\nolimits_{\alpha\alpha} A^T$$

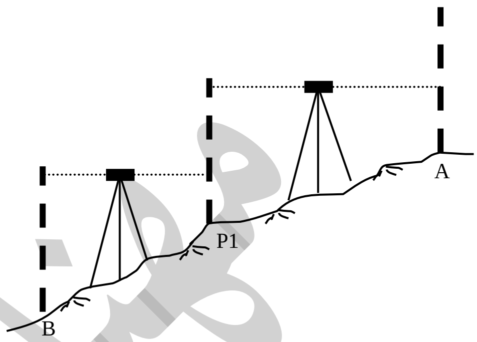
$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2S^2 & 0 & 0\\ 0 & 2S^2 & 0\\ 0 & 0 & 2S^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2S^2 & 2S^2 & 2S^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = 2S^2 + 2S^2 + 2S^2 = 6S^2$$

$$\Rightarrow \sigma_f{}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_\beta{}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma_\gamma{}^2 = 1^2\times 2S^2 + 1^2\times 2S^2 + 1^2\times 2S^2 = 6S^2 \Rightarrow \sigma_f = \sqrt{6}S$$

مثال: اختلاف ارتفاع بین نقاط P1,A و همچنین B,P1 ترازیابی شده است. اگر اختلاف ارتفاعات اندازه‌گیری شده $\Delta h_{A,P1}=-5^m \pm 1^{cm}$ و $\Delta h_{P1,B}=-12^m \pm 2^{cm}$ باشد و $\Delta h_{A,P1}$ و $\Delta h_{P1,B}$ مستقل از هم باشند و ارتفاع نقطه A ثابت و $HA=20^m$ باشد مطلوب است ارتفاع نقاط B,P1 همراه با دقتشان.

$$\begin{cases} H_1 = HA + \Delta h_1 \\ H_B = HA + \Delta h_1 + \Delta h_2 \end{cases}$$ معادلات

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_B \end{bmatrix} =$$ مجهولات



$$L = \begin{bmatrix} \Delta h_{A,P1} \\ \Delta h_{P1,B} \end{bmatrix}$$ مشاهدات

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} H_{P1} \\ H_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_{A,P1} \\ \Delta h_{P1,B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HA \\ HA \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_{P1} \\ H_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

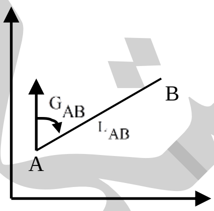
$$\sum_{LL} = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum_{XX} = A \sum_{LL} A^T$$

$$\sum_{XX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{\Delta h_{A,P1}} &= \pm\sqrt{1}cm \\ \sigma_{\Delta h_{P1,B}} &= \pm\sqrt{5}cm \\ \sigma_{\Delta h_1 \Delta h_2} &= 1 \end{aligned}$$

مثال: اگر A در سیستم مختصات قائم‌الزاویه در شکل زیر فاصله $L=500^m$ و آزیموت امتداد AB برابر $G_{AB}=48^g$ اندازه‌گیری شده باشد و خطای نسبی طول 120^{ppm} و خطای استاندارد زاویه 0.05^g باشد مطلوب است

الف) اختلاف مختصات بین نقاط A , B $(\Delta y_{AB}, \Delta x_{AB})$

ب) ماتریس واریانس کواریانس مجهولات $(\sum_{xx})$



$$\begin{aligned} \Delta x &= L.\sin G = 500 \times \sin 48 = 342.274^m \\ \Delta y &= L.\cos G = 500 \times \cos 48 = 364.4843^m \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \sin G & L\cos G \\ \cos G & -L\sin G \end{bmatrix}$$

$$e_L = \frac{\sigma_L}{L} \Rightarrow \frac{120}{1000000} = \frac{\sigma_L}{500} \Rightarrow \sigma_L = 0.06^m \ , \ \sigma_G = \frac{0.05 \times \pi}{200} = 0.000785$$

$$\sum_{xx} = A \sum_{LL} A^T \Rightarrow \sum_{xx} = \begin{bmatrix} \sin G & L\cos G \\ \cos G & -L\sin G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06^2 & 0 \\ 0 & 0.00078 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin G & \cos G \\ L\cos G & -L\sin G \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{L_1}^2 \sin^2(G) + \sigma_G^2 L^2 \cos^2(G) & \sigma_L^2 \sin(G)\cos(G) - \sigma_G^2 L.\cos(G)L.\sin(G) \\ \sigma_L^2 \sin(G)\cos(G) - \sigma_G^2 L.\cos(G)L.\sin(G) & \sigma_L^2 \cos^2(G) + \sigma_L^2 L^2 \sin^2(G) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{xx} = \begin{bmatrix} 0.0836 & -0.0752 \\ -0.0752 & 0.0742 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{\Delta x_{AB}} &= \pm\sqrt{0.0836} \\ \sigma_{\Delta y_{AB}} &= \pm\sqrt{0.0742} \end{aligned}$$

مثال: طول و عرض یک زمین مستطیل به صورت زیر اندازه‌گیری شده است.

$a = \{50.1,\ 50.2,\ 49.9,\ 50,\ 50.1\}$

$b = \{20.1,\ 20,\ 20.2,\ 19.9,\ 19.8\}$

مطلوب است خطای مساحت و طول قطر این مستطیل که از این مشاهدات بدست آید.

$$\begin{cases} S = \bar{a}.\bar{b} \\ d = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\gamma \bar{a}} & \frac{\partial S}{\partial \bar{b}} \\ \frac{\partial d}{\partial \bar{a}} & \frac{\partial d}{\partial \bar{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{a} \\ \frac{\bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2}} & \frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.0600 & 20.0000 \\ 0.9286 & 0.3710 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{a}}^2 & \sigma_{\bar{a}\bar{b}} \\ \sigma_{\bar{b}\bar{a}} & \sigma_{\bar{b}}^2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{\bar{a}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}{n-1} = 0.0130$$

$$\sigma_{\bar{b}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(b_i - \bar{b})^2}{n-1} = 0.0250$$

$$\Rightarrow \sum_{LL} = \begin{bmatrix} 0.0130 & 0 \\ 0 & 0.0250 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum_{xx} = \begin{bmatrix} 50.0600 & 20.0000 \\ 0.9286 & 0.3710 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0130 & 0 \\ 0 & 0.0250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.0600 & 0.9286 \\ 20.0000 & 0.3710 \end{bmatrix}$$

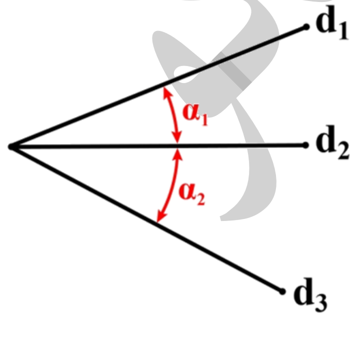
$$\Rightarrow \sum_{xx} = \begin{bmatrix} 42.5780 & 0.7898 \\ 0.7898 & 0.0147 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_S = \pm\sqrt{42.5780} = \pm 6.5252 \\ \sigma_d = \pm\sqrt{0.0147} = \pm 0.1210 \end{matrix}$$

نکته: اگر یک کمیت به m سری تقسیم و هر سری n بار اندازه‌گیری شده باشد.

$$\sigma_{\hat{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}} \times \sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

یعنی انحراف کل خطا به نسبت جذر تعداد دهانه افزایش و نسبت به جذر تعداد دفعات تکرار کاهش می‌یابد.

تمرین: برای اندازه‌گیری در زاویه α_1, α_2 سه امتداد d_1, d_2, d_3 را به ترتیب با دقت‌های $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ اندازه‌گیری کرده‌ایم. اگر امتدادها مستقل از هم باشند ماتریس واریانس- کوواریانس زوایای α_1 و α_2 را تعیین کنید.

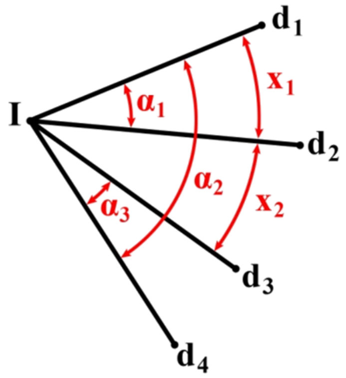


مشاهدات $= d_1, d_2, d_3$

مجهولات $= \alpha_1, \alpha_2$

$$\begin{cases} \alpha_1 = d_2 - d_1 \\ \alpha_2 = d_3 - d_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \sum_{LL} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \circ \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{\alpha_1} = \pm\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \sigma_{\alpha_2} = \pm\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2} \end{matrix}$$



تمرین: در شکل زیر از ایستگاه I زوایای زیر قرائت شده است و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ مستقل از هم می‌باشند زاویه x_1, x_2 را همراه با دقت آن‌ها بدست آورید.

$$\alpha_1 = 20°\,10'\,20'' \pm 1''$$
$$\alpha_2 = 80°\,5'\,\ 50''\ \pm 1''$$
$$\alpha_3 = 15°\,20''\,20'' \pm 1''$$

تمرین: برای تعیین مساحت یک زمین مستطیل شکل طول و عرض آن را اندازه‌گیری کرده‌ایم و داریم.

$a = 400^m \pm 6^{mm} \qquad b = 300 \pm 5^{mm}$

اگر طول و عرض مستطیل مستقل از هم اندازه‌گیری شده باشد دقت مساحت را تعیین کنید.

$$S = a.b \Rightarrow \sigma_s^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 = b^2\left(\frac{6}{1000}\right)^2 + a^2\left(\frac{5}{1000}\right)^2$$
$$\sigma_s^2 = 90000^{m^2} \times 3.6\times10^{-5} + 160000^{m^2} \times 25\times10^{-5} = 7.24 \Rightarrow \sigma_s = 2.69^m$$

مثال: مطلوب است خطای اندازه‌گیری یک طول 300^m که با یک نوار اندازه‌گیری با طول 50^m و با انحراف معیار $\pm 5^{mm}$ اندازه‌گیری شده است.

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6$$
$$\sigma_{L_1} = \sigma_{L_2} = \sigma_{L_3} = \sigma_{L_4} = \sigma_{L_5} = \sigma_{L_6} = \sigma_L = \pm 5^{cm}$$
$$\Rightarrow \sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_{L_1}^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}\right)^2 \sigma_{L_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial L}{\partial L_6}\right)^2 \sigma_{L_6}^2 \Rightarrow \sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2 + \ldots + \sigma_{L_6}^2 = 6\sigma_L^2$$
$$\Rightarrow \sigma_L = \sigma\sqrt{n} \Rightarrow \sigma_L = 5\times\sqrt{6} = 12^{mm}$$

مثال: چنانچه اختلاف ارتفاع نقطه A تا B $10^m \pm 2^{cm}$ و فاصله A تا B $100^m \pm 5^{cm}$ باشد. مطلوب است انحراف معیار شیب AB

$$S = \frac{\Delta H}{L} \Rightarrow \sigma_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial \Delta H}\right)^2 \sigma_{\Delta H}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \qquad f = \frac{C}{L} \Rightarrow f'(L) = \frac{C' \times L - L'C}{L^2}$$
$$\sigma_S = \sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)^2 \sigma_{\Delta H}^2 + \left(\frac{-\Delta H}{L^2}\right)^2 \sigma_L^2} \Rightarrow \sigma_s = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta H}}{L}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta H}{L^2}\sigma_L^2\right)^2} = \frac{\Delta H}{L}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta H}}{\Delta H}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \sigma_s = \frac{10}{100}\sqrt{\left(\frac{0.02}{10}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{100}\right)^2} = 0.00005 \approx 0.005\%$$

مثال: در اندازه‌گیری یک طول 300^m با نوار اندازه‌گیری 50^m جهت رسیدن به دقت نسبی $\frac{1}{8000}$، در صورتی

که خطای قرائت هر طرف نوار برابر 2^{cm} باشد. چند بار باید اندازه‌گیری را تکرار کرد.

$$e_\gamma = \frac{1}{8000} = \frac{\sigma_L}{30000^{cm}} \Rightarrow \sigma_L = 3.75^{cm}$$

$$\sigma_L = \sigma_{li}\sqrt{n} \quad ,n=6 \;\; ,L_i = L_{R2} - L_{R1} \Rightarrow \sigma_{Li} = \sqrt{\sigma_{LR2}^2 + \sigma_{LR1}^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$3.75 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{m}} \Rightarrow 3.75^2 = \frac{4\times 2\times 6}{m} \Rightarrow m = \frac{48}{14.625} = 3.28 \Rightarrow n = 4$$

مثال: در اندازه‌گیری اضلاع یک زمین به شکل مثلث به شرح ذیل

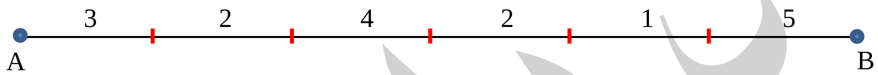
$$a = 25.13^m \pm 3^{cm} \qquad b = 18.24^m \pm 3^{cm} \qquad c = 23.15^m \pm 3^{cm}$$

مطلوب است خطای مطلق و نسبی بدست آوردن مساحت این زمین

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 33.26 \Rightarrow \sigma p = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_c^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sigma^2} = \frac{3}{2}\times 3 = 4.5^{cm}$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \sigma_s^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 \sigma_p{}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^2 \sigma_a{}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 \sigma_b{}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)^2 \sigma_c{}^2$$

مثال: چنانچه جهت دستیابی به اندازه طول AB به طول 300^m از یک نوار اندازه‌گیری 50^m استفاده کرده باشیم و هر دهانه را به ترتیب شکل زیر در تکرارهای متفاوتی اندازه‌گیری کرده باشیم.



و خطای قرائت ابتدا و انتهای نوار به ترتیب برابر 1^{mm}, 2^{mm} باشد مطلوب است مقدار خطای مطلق اندازه‌گیری طول AB

مثال: چنانچه جهت تعیین مساحت زمین به شکل مثلث مشاهدات زیر انجام شده باشد مطلوب است خطای مساحت زمین

$$AB = 30.15^m \pm 3^{cm} \qquad AC = 20.12^m \pm 2^{cm} \qquad \hat{A} = 70^\circ\ 11'\ 20'' \pm 5''$$

$$\left.\begin{aligned} h &= \sin\alpha \times a \\ S &= h \times b \times \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \frac{a\times b}{2} \times \sin\alpha$$

$$\sigma_S = \sqrt{(\frac{b}{2}\sin\alpha)^2\sigma_a^2 + (\frac{a}{2}\sin\alpha)^2\sigma_b^2 + (\frac{a+b}{2}\cos\alpha)^2\sigma_\alpha^2 +}$$

مثال: چنانچه در یک مثلث دو زاویه با یک دستگاه اندازه‌گیری شده باشد مطلوب است بدست آوردن زاویه سوم و میزان انحراف معیار زاویه سوم

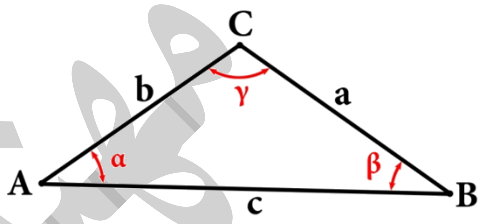
$$\alpha = 60^\circ\ 50'\ 20'' \pm 2'' \qquad \gamma = ?$$
$$\beta = 40^\circ\ 11'\ 16'' \pm 4'' \qquad \sigma_\gamma = ?$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta \Rightarrow A = [-1 \quad -1]$$

مثال: چنانچه در یک مثلث مطابق شکل زیر مشاهدات ما دو زاویه و ضلع بین آن‌ها باشد مطلوب است تعیین خطای بدست آوردن دو ضلع دیگر و همچنین بدست آوردن ماتریس واریانس کواریانس مجهولات

$$c = 20^m \pm 3^{cm}$$

$$\hat{\alpha} = 60^\circ \pm 3'' \quad \hat{\beta} = 40^\circ \pm 5''$$



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \dfrac{c\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ b = \dfrac{c\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 17.588^m, b = 13.054^m$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ \dfrac{c\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{bmatrix}, \sum_{LL} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{3}{206265}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{5}{206265}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.03)^2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{XX} = B\sum_{LL} B^T \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial a}{\partial \beta} & \dfrac{\partial a}{\partial c} \\ \dfrac{\partial b}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial b}{\partial \beta} & \dfrac{\partial b}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{\sin(\alpha+\beta)} & \dfrac{-a}{\tan(\alpha+\beta)} & \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{-b}{\tan(\alpha+B)} & \dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)} & \dfrac{b}{c} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 13.255 & 3.101 & 0.8794 \\ 2.301 & 17.859 & 0.6527 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum_{XX} = B\sum_{LL} B^T$$

$$\sum_{XX} = \begin{bmatrix} 13.253 & 3.101 & 0.8794 \\ 2.301 & 17.859 & 0.6527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{3}{206265}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{5}{206265}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.253 & 2.301 \\ 3.101 & 17.859 \\ 0.8794 & 0.6527 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.96\times10^{-4} & 5.166\times10^{-4} \\ 5.166\times10^{-4} & 3.836\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{XX} = \begin{bmatrix} 6.96 & 5.166 \\ 5.166 & 3.84 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma_a = \sqrt{6.96} = \pm 0.026^{cm} \\ \sigma_b = \sqrt{3.830} = \pm 0.0196^{cm} \end{array}$$

مثال: چنانچه برای بدست آوردن ارتفاع یک ساختمان از دستگاه توتال استیشنی استفاده کرده باشیم که دقت قرائت امتداد در آن برابر $5''$ و دقت طولیابی آن $5+5^{ppm}$ باشد و مشاهدات زیر انجام شده باشد. مطلوب است ارتفاع ساختمان به همراه دقت آن.

$$\alpha = 30^\circ\ 15'\ 30'' \qquad \sigma_\alpha = \sqrt{2}\times 5'' = 7.0711''$$

$$L = 158.43^m \qquad \frac{5}{1000000} = \frac{\sigma_L}{158430} = 0.7922 \Rightarrow \sigma_L = 5+0.7922 = 5.7922^{mm}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{H}{L} \Rightarrow H = L\times\tan(\alpha) = 158.43\times\tan(30^\circ\ 15'\ 30'') = 92.4245^m$$

$$\sigma_H^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 = \tan(\alpha)^2\times\sigma_L^2 + L^2\times(1+\tan^2(\alpha))^2\times\sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_H^2 = \tan^2(30^\circ\ 15'\ 30'')\times\left(\frac{5.7922}{1000}\right)^2 + 158.43^2\times(1+\tan^2(30^\circ\ 15'\ 30''))^2\times(\frac{7.0711}{260265})^2 = 5.7568\times10^{-5}$$

$$H = 92.4245^m \pm 0.0576^{mm}$$

مثال: چنانچه مانند شکل زیر برای بدست آوردن مختصات نقطه B مشاهدات زیر صورت گرفته باشد و مختصات نقطه A ثابت فرض شود مطلوب است مختصات نقطه B و همچنین ماتریس واریانس کوریانس مختصات برآورد شده نقطه B. ($\sum_{XX}$)

$$G_{AB} = 45.3723^g$$

$$\overline{AB} = 167.321^m \pm 5+3^{ppm}$$

$$A\left|\begin{matrix}100\\100\end{matrix}\right.$$

نمونه سوال:

۱)تقسیم بندی خطاها را از نظر ماهیت آن‌ها بیان کنید و هرکدام را مختصر توضیح دهید.

۲)متغیرهای کمی گسسته و پیوسته را توضیح دهید و مشخص کنید، مجموعه زیر گسسته هستند یا پیوسته:

الف)طول عمر یک دوربین نقشه برداری(پیوسته)   ب)تعداد مشاهدات یک طول(گسسته)

۳)خواص توابع احتمالی گسسته و پیوسته را بنویسید.

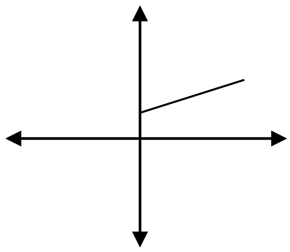
جواب:

پیوسته $\begin{cases} 1)\ f(x) \geq 0 \\ 2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$ گسسته $\begin{cases} 1)\mathrm{P}(X = x) \geq 0 \\ 2)\sum \mathrm{P}(X = x) = 1 \end{cases}$

۴)یک متغیر تصادفی پیوسته که مقادیرش بین $x_1 = 2$ و $x_2 = 6$ و دارای تابع چگالی $f(x) = \frac{1+2x}{36}$ می‌باشد مطلوب است $\mathrm{P}(0 < x < 4)$.

جواب :

$$\int_2^4 \frac{1}{36}(1+2x)dx = \frac{1}{36}\int_2^4 dx + \frac{1}{36}\int_2^4 2dx = \frac{1}{36}\left(x\Big|_2^4 + x^2\Big|_2^4 \right)$$
$$= \frac{1}{36}\left((4-2)+(16-4)\right) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$



۵)میانگین مشاهدات طولی زیر را به روش تغییر مبدأ بدست آورید.

جواب :

L	L
100.37	100.68
100.54	100.51
100.25	100.73
100.30	100.01
100.83	100.31

$\mathrm{A} = 100 \Rightarrow$

A_i	A_i
0.37	0.68
0.54	0.51
0.25	0.73
0.30	0.01
0.83	0.13

$$\Rightarrow \bar{L} = \left(\sum_{i=1}^{10} A_i \right) + 100 = 100.435$$

۶)امید ریاضی مجموعه زیر را بدست آورید.

x_i	f_i	$p_{(x_i)}$

2	3	3/17
3	1	1/17
4	5	5/17
6	2	2/17
1	1	1/17
5	3	3/17
2	2	2/17

جواب:

$$\bar{x} = \frac{2\times3+3\times1+4\times5+6\times2+1\times1+5\times3+2\times2}{17} = 3.588$$

۷)هیستوگرام و پلیگون نمونه‌های زیر را با فرض $K=4$ (تعداد کلاس $=K$) و میانه و مد این مجموعه را نیز محاسبه کنید $P(7 \le x \le 13)$ را هم از روی هیستوگرام و هم با استفاده از فرمول احتمال بدست آورید و روی هیستوگرام نیز نشان دهید.

جواب :

$$L = \{6,4,3,6,8,19,20,11,9,8,7,6,12,14,16,10,11,9,7,4\}$$

$X=20$ $\quad R = L_{max} - L_{min} = 20-3=17$ و $k=4 \Rightarrow d = \frac{R}{K} = \frac{17}{4} = 4.25$

$Mode = 6 \quad Mediam = \frac{8+9}{2} = 8.5$

$$\{3,4,4,6,6,7,7,8,8,9,9,10,11,11,12,14,16,19,20\}$$

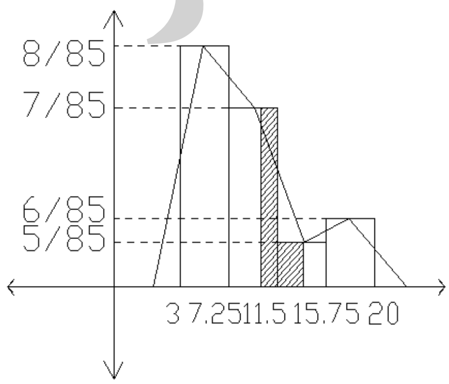
$n_1 = [3,7.25] = 8 \quad n_3 = (11.5,15.75] = 2 \quad n_4 = (15.75,20] = 3 \quad n_2 = (7.25,11.5] = 7$

$$s = (n_1+n_2+n_3+n_4)\times d = (8+7+2+3)\times4.25 = 20\times4.25 = 85$$

$$\tilde{n}_1 = \frac{8}{85} \quad , \quad \tilde{n}_2 = \frac{7}{85} \quad , \quad \tilde{n}_3 = \frac{2}{85} \quad , \quad \tilde{n}_4 = \frac{3}{85}$$

$$P(7 \le x < 7.25) + P(7.25 < x \le 11.5) + P(11.5 < x \le 13) = 0.25\times\frac{8}{85} + 4.25\times\frac{8}{85} + 1.5\times\frac{8}{85} = 0.565$$

$$, \ P(7 \le x \le 13) = \frac{10}{20} = 0.5$$



۸)اگر سه متغیر تصادفی x و y و z مستقل از هم باشند و $f=3x+2yz^2-3$ باشد وامید ریاضی آن‌ها $E(x)=\mu_x$ و $E(y)=\mu_y$ و $E(z)=\mu_z$ و $\mu_z=\mu_y$ مطلوب است $E(f)$:

جواب :

$$E(f)=3\mu_x+2\mu_y\mu_z^2-3\Rightarrow E(f)=3\mu_x+2\mu_z^3-3$$

$L_{i2}-\bar{L}_1$	$L_{i2}-\bar{L}_2$	$(L_{i1}-\bar{L}_1)(L_{i2}-\bar{L}_2)$
0.252	0.2	0.0504
-0.158	1.2	-0.1896
-0.038	-0.8	0.0304
-0.118	0.2	-0.0236
0.062	-0.8	-0.0496

۹)اثبات کنید که $\sigma_x^2=E(x^2)-(E(x))^2$

جواب :

$$\sigma_x^2=E\left[(x-\mu_x)^2\right]\Rightarrow E\left[\left(x^2-2x\mu_x+\mu_x^2\right)\right]\Rightarrow E(x^2)-2E(x)E(x)+(E(x))^2$$

$$\Rightarrow E(x^2)-2(E(x))^2+(E(x))^2=E(x^2)-(E(x))^2$$

۱۰)انحراف معیار (std) مشاهدات زیر را به دست آورید.

جواب :

x_i	v_i^2
9.89	0.0936
9.36	0.0502
9.27	0.0986
9.95	0.1339
9.45	0.1796

$$\bar{x}=9.584$$

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{x}V_i^2}{n-1}}=0.313975$$

۱۱)چنانچه دقت نسبی طولیابی دوربین نقشه برداری $3+5ppm$ باشد مطلوب است دقت طول 3750^m که با این دوربین اندازه گیری شده است.

جواب:

$$\frac{5}{1000000}=\frac{e_L}{3750000}\Rightarrow e_L=18.75^{mm}+3^{mm}=21.75^{mm}$$

۱۲)دقت و صحت را توضیح دهید.

۱۳)کواریانس دو سری مشاهدات زیر را به دست آورید:

جواب:

$$L_1=\{10.35,9.89,10.01,9.93,10.11\}\quad L_2=\{10,11,9,10,9\}$$

$$\bar{L}_1=10.048\qquad \bar{L}_2=9.8\qquad\Rightarrow \operatorname{cov}_{L1L2}=\frac{-0.182}{5}=-0.0364$$

۱۴)مطلوب است ماتریس واریانس و کوواریانس سه نمونه زیر و همچنین ضرایب وابستگی آن‌ها :

$$L_1=\{-3,1,2,3,4\}\qquad L_2=\{1,3,1,2,2\}\qquad L_3=\{6,7,5,1,4\}$$

$$\bar{L}_1=1.4\qquad \bar{L}_2=1.8\qquad \bar{L}_3=4.6$$

جواب:

$$\begin{bmatrix}7.3 & 0.68 & -2.84\\ 0.68 & 0.7 & 0.12\\ 2.84 & 0.12 & 5.3\end{bmatrix}\qquad \rho_{L1L3}=-0.571\qquad \rho_{L1L2}=0.376\qquad \rho_{L2L3}=0.0778$$

۱۵)مشاهدات زاویه‌ای ۱۰ بار انجام شده است و قرائت‌های زیر بدست آمده است مطلوب است، محتمل‌ترین مقدار و انحراف معیار آن (در صورت وجود اشتباه آن را حذف کنید)

جواب :

شماره	زاویه	شماره	زاویه
1	45.38	6	45.41
2	45.41	7	45.43
3	45.49	8	45.49
4	45.39	9	45.38
5	45.40	10	45.34

مقدار اشتباه درون مشاهدات وجود ندارد

$$\bar{x}=45.403$$

$$\sigma=0.03889\Rightarrow e_{\max}=2.5\times\sigma=0.0972$$

خطایی وجود ندارد $\sigma=0.03889$

۱۶)اگر y_1 و y_2 دو متغیر تصادفی باشند که به صورت زیر تابعی خطی از x_1 و x_2 باشند و $E(x)=\mu_{x_1}=2$ و $E(x)=\mu_{x_2}=3$ باشند آنگاه μ_{y1} و μ_{y_2} را به دست آورید.

$$y_2=4x_2+3x_1+2\quad y_1=6x_1+\frac{1}{3}x_2-1$$

جواب:

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & \frac{1}{3}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ +2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & \frac{1}{3}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ +2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ +2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 20\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

۱۷) اگر در یک مثلث امتدادهای زوایای α و β و γ قرائت شده باشد و دقت قرائت هر امتداد برابر با $2''$ باشد مطلوب است بدست آوردن دقت حاصل جمع کل زوایا (f):

جواب :

واریانس برای هر زاویه $\alpha=d_2-d_1\Rightarrow\sigma_\alpha^2=\left(\frac{\delta\alpha}{\delta d_1}\right)^2\sigma_{d_1}^2+\left(\frac{\delta\alpha}{\delta d_2}\right)^2\sigma_{d_2}^2=1^2\times2^2+1^22^2=8''=\sigma_\alpha^2$

$$\Rightarrow f=\theta+\alpha+\beta\Rightarrow\sigma_f^2=\left(\frac{\delta f}{\delta\alpha}\right)^2\sigma_\alpha^2+\left(\frac{\delta f}{\delta\beta}\right)^2\sigma_\beta^2+\left(\frac{\delta f}{\delta\gamma}\right)^2\sigma_\gamma^2=8''+8''+8''=24''$$

$$\Rightarrow\sigma_f^2=24''\Rightarrow\sigma_f=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

۱۸)طول و عرض یک زمین مستطیل شکل را به کمک یک نوا اندازه گیری 50^{m} که انحراف معیار آن 5^{cm} بوده اندازه گیری کردیم و مقادیر $a=400$ $b=300$ حاصل شده است مطلوب است: محاسبه دقت مساحت زمین (σ_s)

$$\delta_a=\delta\times\sqrt{m}\rightarrow m=\frac{400}{50}=8\Rightarrow\delta_a=5\times\sqrt{8}=10\sqrt{2}$$

$$\delta_b=\delta\times\sqrt{m}\rightarrow m=\frac{300}{50}=6\Rightarrow\delta_b=5\times\sqrt{6}$$

$$s=a\times b\Rightarrow\delta_s^2=(b^2\times100\times2+a^2 25\times6=30000^2\times200+40000^2\times150=42e^{10}\Rightarrow\sigma_s=\sqrt{42e^{10}}=648074.0698$$

$$\Rightarrow\sigma_s=\frac{648074.0698}{10000}=64.80740698^{m^2}$$